T 24770

REVISTA MATEMATICĂ

DIN

TIMIȘOARA

APARE LA 15 A FIECĂREI LUNI

VOLUMUL XVII.

ANUL 1937—1938

BIBLIO[illegible]ASTRA"
SIBIU

TIMIȘOARA
INSTITUT DE ARTE GRAFICE „TIPOGRAFIA ROMANEASCĂ"
1 9 3 8

'05

IAN 2014

I 24770

ANUL XVII. 15 MARTIE 1937 No. 1.

REVISTA MATEMATICĂ
DIN
TIMIȘOARA

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA APARE ODATA PE LUNA.
PREȚUL UNUI NUMAR 12 LEI PREȚUL ABONAMENTULUI 100 LEI PE AN.

CUPRINSUL

1. N. N. MIHAILEANU: PROPOZITII DEDUSE PRIN INVERSIUNE.
2. NOTE MATEMATICE: 1, 2.
3. BIBLIOGRAFIE.
4. PROBLEME REZOLVATE: 195, 541, 1491, 1499, 1503, 1512.
5. PROBLEME PROPUSE: 1554-1561.
6. INFORMATIUNI.

BIBLIO[illegible]ASTRA"
SIBIU

TIMISOARA
Institut de Arte grafice Tipografia Românească

2464.

„Orice profesor de matematici, din orice colţ al ţării şi de la orice şcoală, trebuie să fie apostol al specialităţii sale. Din felul cald şi luminos cum îşi face lecţiile, din drumul drept şi demn pe care îl urmează în viaţă, trebuie să apară limpede că judecata matematică precisă şi sigură, curată ca cristalul, are o înaltă şi admirabilă valoare educativă pentru viaţă.

Adevărul curat, adevărul drept, adevărul luminos, să fie îndreptarul vieţei noastre. Aceasta să fie contribuţia specialităţii noastre la îndrumarea neamului românesc, pe calea care-i stă deschisă".

G. ŢIŢEICA

Manuscrisele destinate Revistei Matematice din Timişoara conţinând soluţiunile problemelor propuse şi probleme, note sau articole originale vor fi trimise pe adresa: **V. Alaci,** profesor Şcoala Politechnică, Timişoara.

Plata abonamentului precum şi reclamaţiunile de neprimirea Revistei vor fi adresate d-lui **Prof. C. Teodorescu,** Rectorul Şcoalei Politechnice din Timişoara.

Plata abonamentului se face prin CEC (Casa de economii şi cecuri postale. unde revista are contul CEC No. 85208, sau prin mandat postal adresat d-lui Prof. C. TEODORESCU, Rectorul Şcoalei Politechnice din Timişoara.

Taxa de Membru în „Comitetul de Conducere al Revistei Matematice din Timişoara" este pentru anul XVII, de 200 (două sute) lei.

Colecţia R. M. T., se găseşte la Administraţia Revistei, şi se poate procura în schimbul preţului:

Anul I, epuizat. Anii: II—XVI inclusiv, broşate, 120 lei fiecare.

Rugăm pe corespondenţii nostrii, a ne trimete de urgenţă costul abonamentului de 100 (una sută) lei, pentru „R. M. T." pe anul XVII, care începe la 15 Martie 1937.

Revista Matematică din Timişoara, apare sub conducerea unui comitet compus din:

1. **Abason E.** Inginer, Doctor în Matematici, Profesor şi Sub-Director la Şc. Politechnică din Bucuresti, Mateiu Voevod 25, Bucureşti.
2. **Abramescu N.** Doctor în Matematici, Profesor la Universitatea din Cluj.
3. **Adam D. R.** Sublt. de geniu, str. M. Cogâlniceanu 31, Bucureşti.
4. **Adamescu M.** Licenţiat în Matematici, Inspector Financiar, str. Flondor 37, Cernăuţi.
5. **Alaci V.** Doctor în Matematici, Profesor la Şc. Politechnică, Timişoara.
6. **Anastasiade I.** Inginer, Profesor de Material Rulant de cale Ferată, inzestrarea căilor ferate, intinderea exploatării, la Şc. Polit., Timişoara.
7. **Andronescu P.** Doctor-Inginer, Profesor de Electrotechnică la Şc. Polit., Timişoara.
8. **Angelescu A.** Doctor în Matematici, Profesor la Universitatea din Bucureşti.
9. **Angheluţă Th.** Doctor în Matematici, Profesor la Universitatea din Cluj.
10. **Ardeleanu Şt.** Inginer, Profesor la Şcoala Sup. de Arte şi Meserii, Asistent pe lângă catedra de Technologie, Şc. Polit., Timişoara.
11. **Arghir I.** Profesor la Liceul din Tg.-Jiu.
12. **Baidaff B. I.** Doctor în Matematici, Buenos Aires, Republica Argentina (Avenida de Mayo 560).
13. **Bakony C.** Inginer, Profesor de Technologie la Şc. Polit., Timişoara.
14. **Balazs D.** Inginer, Asistent pe lângă Catedra de Geometrie Descriptivă dela Şc. Polit, Timişoara, str. Gen. Joffre 12.
15. **Bănărescu M.** Inginer, Director la Atelierele C. F. R., Profesor la Catedra de Maşini Termice dela Şc. Polit., Timişoara, str. Doja 51.
16. **Bănciu I.** Prof, Directorul „Casei de Depuneri", str. Lucaci 05, Bucureşti.
17. **Bărglăzan A.** Inginer, Conferenţiar la Maşini Hidraulice, dela Şc. Polit., Timişoara.
18. **Baron C.** Asistent la catedra de Fizică dela Şc. Politechnică, Timişoara.
19. **Blaşian V.** Inginer de Mine, Profesor la catedra de Exploatări Miniere dela Şc. Polit., Timişoara.
20. **Bobârnac M.** Inginer, Asistent pe lângă catedra de Maşini Termice dela Şc. Polit, Timişoara.
21. **Bonea I.** Inginer, Conferenţiar la Topografie şi Geodezie, Şcoala Politechnică, Timişoara.
22. **Botea N. G.** Licenţiat în Matematici, Asistent la Şc. Polit. din Bucureşti, Calea Floreasca 46, Bucureşti 3.
23. **Botez M.** Doctor în Matematici, Directorul Şcoalei Superioare de Comerţ din Piatra-Neamţ.
24. **Botez M.** Profesor la Şc. Normală şi Liceul Milit., str. Speranţei 12, Iaşi.
25. **Bratu Gh.** Doctor în Matematici, Profesor la catedra de astronomie dela Universitatea din Cluj.
26. **Breazu D.** Profesor de liceu, Bucureşti.
27. **Buicliu Gh.** General de artilerie. Inspector general al Armatei. Fost 10 ani profesor de Geometrie Analitică la Şc. Polit. din Timişoara. Insărcinat cu conferinţa de Balistică Exterioară la Şc. Polit., din Bucureşti, str. Dr. Lister 5, Bucureşti 6.
28. **Călniceanu C.** Inginer, Conferenţiar, Asistent pe lângă catedra de Organe de Maşini la Şc. Polit., Timişoara.
29. **Cândea C.** Doctor-Inginer, Profesor şi membru în Comitetul de Direcţie la Şc. Polit. din Timişoara.
30. **Catona V.** Inginer, Asistent pe lângă catedra de Măsuri Electrice la Şc. Polit. din Timişoara.
31. **Claudian Virgil.** Profesor la liceul Mihai Viteazul din Bucureşti.
32. **Coca A.** Licenţiat în Litere, Lector de limba engleză la Şc. Polit. din Timişoara.
33. **Coman A.** Profesor liceul „C. Diaconovici-Loga, Profesor onorofic la Şc. Politechnică din Timişoara, Preşedintele Comisiei Interimare al Municipiului Timişoara.
34. **Comănescu A.** Licenţiat în Matematici, Profesor la liceul din T-Măgurele.
35. **Constantinescu G. G.** Licenţiat în Matematici, Profesor la liceul din Tecuci.
36. **Constantinescu Gh.** Profesor, la Iic. Lazăr, Bucureşti.
37. **Contrea A.** Doctor în Ştiinţele Naturale, Asistent pe lângă catedra de Mineralogie şi Petrografie dela Şc. Polit., Timişoara.
38. **Costăchescu D. C.** Sub-Lt de Marină, Constanţa.
39. **Cristescu I.** Inginer, Profesor la Şc. Politechnică, Timişoara.
40. **Cristodulo N.** Licenţiat în Chimie, Asistent pe lângă catedra de Chimie dela Şc. Polit., Timişoara.
41. **Cserveny I.** Inginer, Asistent pe lângă catedra de Centrale Electrice dela Şc. Polit., Timişoara.
42. **Curea I.** Profesor de matematici la liceul din Lugoj.
43. **Demetrescu Gh.** Doctor în Matematici, Subdirector la Observatorul Astronomic din Bucureşti.
44. **Diaconescu N.** Profesor la liceul din Slatina.
45. **Dobrozemsky M.** Inginer, Asistent pe lângă catedra de Exploatări Miniere dela Şc. Polit., Timişoara.
46. **Dumitriu-Dada.** Profesor la Colegiul Carol I, Craiova.
47. **Florescu M.** Inginer Inspector Silvic, str. A. Orescu 9, Bucureşti.
48. **Frătici I.** Inginer, Asistent pe lângă catedra de Cazane, dela Şc. Politechnică, Timişoara.
49. **Georgescu D.** Profesor la Liceul din Piteşti.
50. **Gheorghiu V.** Inginer, Asistent pe lângă catedra de Mecanică dela Şc Polit., Timişoara.
51. **Ghermănescu M.** Doctor în Matematici, Conferenţiar la Şcoala Politechnică, Timişoara.
52. **Ghiţescu Spiridon.** Profesor secundar, Mizil.
53. **Hristea H.** Inginer la dep. C. F. R.
54. **Ionescu-Biss H. P.** Profesor la liceul din Oltenita.
55. **Ionescu C-tin Bujor.** Licenţiat în Matematici, Profesor. Str. Maior Popescu Gh. 26, Bucureşti.
56. **Ionescu-Ţiu D. C.** Locot., str. Popa-Tatu 17, Bucureşti.
57. **Iorgulescu T.** Prof. la liceul Loga, Asistent pe lângă catedra de Geologie dela Şc. Polit., Timişoara.
58. **Kielburger M.** Inginer, Asistent pe lângă Catedra de Electrotechnică dela Şc. Polit., Timişoara.
59. **Kühn I.** Doctor în Chimie, Asistent pe lângă Catedra de Chimie Generală dela Şc. Polit., Timişoara.

60. **Lambrino Gh.** Doctor în Drept şi Economie Politică. Conferenţiar de Economie Politică şi Legislaţie Industrială la Şc. Polit., Timişoara.
61. **Laţiu V.** Doctor în Ştiinţele Naturale, Profesor la Catedra de Mineralogie şi Petrografie dela Şcoala Polit., Timişoara.
62. **Leonida D.** Inginer, Prof. la Şc. Polit., Timişoara.
63. **Linteş I.** Maior de Artilerie, str. Epicol 49, Bucureşti.
64. **Liteanu Gh.** Colonel de Artilerie, Str. L. Carageale 30, Bucureşti.
65. **Lupan A.** Inginer, Prof. la Şc. Polit. din Timişoara.
66. **Macovski Eug.** Doctor în chimie, Conferenţiar la Şcoala Politechnică din Timişoara.
67. **Magheru I.** Doctor în Ştiinţe, Prof. la Şc. Politechnică din Timişoara.
68. **Manughevici C.** Inginer-chimist, şef de Lucrări la Şc. Politechnică, Timişoara,
69. **Mardan D.** Inginer inspector general, Directorul Fabricei de tutun, Prof. la Şc. Polit., din Timişoara.
70. **Marinescu I.** Doctor-Inginer, Conferenţiar la Şc. Politechnică din Timişoara.
71 **Mateescu S.** Doctor în Ştiinţele Naturale, Profesor la Catedra de Geologie dela Şc. Polit. din Timişoara.
72. **Mihaiu Emil.** Profesor la Şc. Sup. de Comerţ din Timişoara.
73. **Mihăileanu N. N.** Profesor la lic. Milit., N. Filipescu.
74. **Miloia I.** Doctor în Litere şi Istoria Artelor, Asistent pe lângă catedra de Geometrie Discriptivă dela Şcoala Polit., Timişoara.
75. **Mioc V.** Licenţiat în Matematici, Profesor la Liceul „C. Diaconovici-Loga, Asistent pe lângă catedra de Analiza Matematică dela Şc. Polit. din Timişoara.
76. **Murgulescu Elena.** Licenţiată în Matematici, Asistentă la Şc. Polit, din Timişoara.
77. **Murgulescu G. I** Doctor în chimie, Conferenţiar la Şc. Polit. din Timişoara.
78. **Nadaşan Şt.** Inginer, Asistent pe lângă catedra de Rezistenţa Materialelor dela Şc Polit., Timişoara.
79. **Naneş Gh.** Profesor la Lic. Sf. Sava, Bucureşti.
80. **Niculescu Gh.** Comandor, inginer, Str. Izvor 98, Bucureşti.
81. **Niculescu Miron.** Doctor în Matematici, profesor la Universitatea din Cernăuţi.
82. **Nichifor Gh.** Doctor în Matematici, Profesor la Universitatea din Bucureşti, Str. Racoviţă 32, Bucureşti.
83. **Nicolau A.** Inginer, Profesor la Şc Polit. din Timişoara, Directorul Uzinei Electrice, Craiova.
84. **Nicolau P.** Inginer, Profesor la Şcoala Politechnică din Timişoara.
85. **Ogrin N.** Doctor în Ştiinţele Comerciale, Conferenţiar la Şc. Polit. din Timişoara.
86. **Onicescu O.** Doctor în Matematici, Profesor la Universitatea din Bucureşti, str. Clopotarii Vechi 25, Bucureşti.
87. **Orăşeanu C.** Inginer-şef, Licenţiat în Matematici, Profesor la Şcoala Politechnică, Bucuresti.
88. **Orăşeanu Gr.** Profesor secundar, Bucureşti.
89. **Patriciu Valeriu.** Doctor. Profesor la catedra de Geologie Economică şi Zăcăminte, la Şcoala Politechnică, Timişoara.
90. **Petrescu A.** Profesor la Academia Agricolă, Bucureşti.
91. **Popescu E.** Doctor în chimie, Profesor la Şcoala Polit., Bucureşti.
92. **Popescu I.** Inginer, Profesor de Maşini Miniere şi Decan la Şc. Polit. din Timişoara.
93. **Protopopescu I.** Inginer-Şef, Profesor la Şcoala Polit. din Timişoara.
94. **Purcariu I.** Director-General al Invăţământului Profesional din Ministerul Instrucţiunii Publice, Bucureşti.
95. **Racliş N. R.** Doctor în Matematici, Directorul Institutului Matematic Român, Profesor, Bucureşti.
96. **Răduleţ R.** Doctor-Inginer, Conferenţiar la Şcoala Politechnică din Timişoara.
97. **Roibănescu C.** Profesor, Bucureşti.
98. **Sauciuc L.** Licenţiat în chimie, Asistent pe lângă Catedra de Chimie dela Şc. Polit. din Timişoara.
99. **Savin C. Ion.** Licenţiat în Matematici, str. Sărăriei 56, Iaşi.
100. **Schileru I.** Inginer, Conferenţiar la Şc. Polit. din Timişoara, Directorul Şcoalei P. T. T., Timişoara.
101. **Sergescu P.** Doctor în Matematici, Licenţiat în Filozofie, Profesor la Universitatea din Cluj.
102. **Severineanu C.** Inginer-Şef, Subdirectorul Tracţiunii C. F. R., Profesor şi Decan la Şc. Polit., Timişoara.
103. **Simionescu Gh. D.** Licenţiat în Matematici, Profesor la lic. Militar din Târgovişte.
104. **Smighelschi O.** Inginer la Fabrica „Nitrogen", Dicio-Sân Martin.
105. **Stamatescu I.** Profesor la Liceul „Matei Basarab" şi „Seminarul Pedagogic Universitar", Bucureşti.
106. **Stambuleanu A.** Doctor-Inginer la C. F. R., Timişoara.
107. **Stan A.** Locotenent de Artilerie, licenţiat matematici, Cluj.
108. **Stăncescu C.** Doctor-Inginer, Profesor la Şc. Polit. din Timişoara.
109. **Stantzel E.** Inginer, Asistent pe lângă Catedra de Construcţii dela Şc. Polit., Timişoara.
110. **Stoicescu L.** Inginer, Conferenţiar la Elemente de Maşini şi Cursul General de Maşini dela Şcoala Polit. din Timişoara.
111. **Stoicescu M.** Profesor, Directorul Liceului „G. Lazăr", Bucureşti.
112. **Suhov I.** Inginer, Asistent la Şc. Polit., Timişoara
113. **Teodorescu C.** Inginer-Şef, Rectorul Şcoalei Politechnice din Timişoara.
114. **Teodosiu A.** Doctor în Matematici, Profesor la Academia de Agricultură din Cluj.
115. **Ţino O.** Doctor în Matematici, Profesor la Catedra de Geometria Analitică dela Şc. Polit., Timişoara.
116. **Vâlcovici V.** Doctor în Matematici, Profesor la Universitatea din Bucureşti, Preşedinte al Consiliului de perfecţionare al Şcoalei Politechnice din Timişoara, Str. Londra 44, Bucureşti.
117. **Vasiliu Leoben Gh.** Inginer Geodet, Asistent la Şc. Polit. din Bucureşti.
118. **Viciu Aurel.** Profesor la lic. Milit., Tg-Mureş.
119. **Vlad I. V.** Inginer-Architect, Profesor la Şc. Polit din Timişoara.
120. **Vlădescu I.** Doctor-Inginer, Conferenţiar la Şc. Polit. din Timişoara.
121. **Zăgănescu I.** Inginer la C. F. R. Timişoara.
122. **Zaharia N. O.** Profesor la liceul Militar, Tg-Mureş.
123. **Zapan Gr.** Lt. Comandor-Aviator, Inginer diplomat al Şcaolei Superioare de Aeronautică şi Coostrucţii Mecaniniei (E. S. A.) din Paris. Adjutant al A. S. R. Principelui Nicolae. Bucureşti II. Calea Griviţei 158.

ANUL XVII — NO. 1. TIMISOARA, 15 MARTIE 1937

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA

APARE LA 15 A FIECAREI LUNI

PREŢUL UNUI NUMAR . . . . . 12 LEI
ABONAMENT ANUAL . . . . . 100 LEI
Abonamentele sunt socotite totdeauna dela 15 Martie

REDACŢIA: Prof. V. ALACI
Şcoala Politechnică din Timişoara.
ADMINISTRAŢIA: Prof. C. TEODORESCU
Rectorul Şcoalei Politechnice din Timişoara.

PROPOZIŢII DEDUSE PRIN INVERSIUNE

DE N. N. MIHAILEANU

Asupra inversiunii s'a scris nenumărate lucrări, unele chiar în Revista aceasta, pentru alte serii de corespondenţi.

Oridecâte ori într'o propoziţie de geometrie elementară, intervin puncte, drepte şi cercuri, se poate aplica cu succes o transformare prin inversiune, fără ca elementarul chestiunii să se schimbe. Prin acest procedeu se poate deduce, de multe ori, mai multe propoziţii inverse dintr'una directă. Vom învedera aceasta pe un exemplu.

1°. Propoziţie directă: M *fiind un punct pe cercul circumscris triunghiului* ABC, *iar* P *un punct arbitrar, cercurile* MPB şi MPC *retaie latura* BC *în* β *şi* γ, *iar* Pβ *şi* Pγ *taie pe* AC *respectiv* AB, *în* B' *şi* C'. *Punctele* A, M, P, B', C' sunt conciclice. [1]

Cazuri particulare se pot obţine după poziţia punctelor P şi M. Unele cazuri limită dau chiar particularizări neaşteptate. Astfel când P e pe dreapte AM, cercul se descompune într'o dreaptă şi punctele B', C' nu pot fi decât aruncate la infinit, pentruca enunţul să fie compatibil, deci se obţine:

a. M *fiind un punct pe cercul circumscris triunghiului* ABC *şi* P *un punct pe* AP, *cercurile* MPB, MPC *retaie pe* BC *în* β *şi* γ; *dreptele* Pβ *şi* Pγ *sunt paralele respectiv cu* AC şi AB. [2]

Când P e pe dreapta BM, cercul BPM retaie latura BC' în punctul ei dela infinit, deci:

b. *In triunghiul* ABC *fie* M *un punct pe cercul circumscris şi* P *pe* BM; *cercul* MPC *taie pe* BC *în* γ *şi* γP *pe* AB *în* C'; *iar paralela din* P *la* BC, *taie pe* AC *în* B'; *pentagonul* APMB'C' *este inscriptibil.*

Dacă P este pe latura BC, Pβ şi Pγ devin tangente, deci:

c. M *fiind un punct oarecare de pe cercul circumscris triunghiului* ABC *şi* P *latura* BC, *tangentele în* P *la cercurile* MPB *şi* MPC *taie laturile* AC *şi* AB *în* B', C'; *pentagonul* AMPB'C' *este inscriptibil.*

Dacă M se confundă cu A:

d. *Fiind dat triunghiul* ABC *şi* P *un punct arbitrar, cercurile* APB *şi* APC, *retaie pe* BC *în* β *şi* γ; *iar* Pβ *şi* Pγ *taie pe* AC *şi* AB *în* B' *şi* C'. *Punctele* A, P, B', C' *sunt pe un cerc tangent în* A *la cercul circumscris.*

Dacă M ajunge în A şi P pe BC', se obţine:

e. *Fie* P *un punct pe latura* BC *a triunghiului* ABC; *tangentele în* P *la cercurile* APB *şi* APC *taie pe* AC *şi* AB *în* B' *şi* C'. *Punctele* A, P, B', C' *sunt pe un cerc tangent în* A *la cercul circumscris.*

Dacă M ajunge în B şi $\gamma \equiv C' \equiv B \equiv M$, iar cercul PMB devine tangent la cerc în B, deci:

f. *Fiind dat triunghiul* ABC, *iar* P *un punct oarecare din planul lui, un cerc tangent în* B *cercului circumscris şi trecând prin* P, *taie pe*

---

[1]) Soluţia este simplă: se observă pe o figură că $\measuredangle(BC, P\gamma) = \measuredangle(MP, MC)$; $\measuredangle(BC, P\beta) = \measuredangle(MP, MB)$, deci $\measuredangle(P\gamma, P\beta) = \measuredangle(MB, MC) = \measuredangle(AB, AC)$ şi A, B', P, C' sunt conciclice. Apoi $\measuredangle(MA, MC) = \measuredangle(BA, BC)$, iar $\measuredangle(MP, MC) = \measuredangle(BC, P\gamma)$, deci $\measuredangle(MA, MP) = \measuredangle(BA, BC) + \measuredangle(BC, P\gamma) = \measuredangle(BA, P\gamma)$ deci şi A, C' P, M sunt conciclice. c. c. t. d.

[2]) Soluţia este de asemenea evidentă: AB şi MC' fiind antiparalele în unghiul (APM, BC), cercul MCP taie laturile unghiului după o antiparalelă Pγ dreptei MC, deci paralelă cu AB, etc. In cele ce urmează, nu vom mai da soluţiile directe pentru a nu îngreuna studiul; ele se pot găsi însă totdeauna.

BC *în* β, *iar* Pβ *taie pe* AC *în* B′ *pe cercul* ABP.

Alte cazuri particulare se pot obține, degenerând triunghiul ABC; astfel, dacă vârfurile A și B se confundă, AC$\equiv$BC, $\beta\equiv$B′ cercul MPB′C′ devine cercul MPB:

g. BC *fiind o coardă,* M *un punct pe acelaș cerc, iar* P *un punct arbitrar, cercul* MPC *taie pe* BC *în* γ *și* P γ *taie tangenta în* B *la cerc în* C′ *pe cercul* MPB.

Dacă B și C se confundă, AB$\equiv$AC, BC devine tangentă la cerc, $\beta\equiv\gamma$, deci:

h. *Fie* A, B, M, P *patru puncte arbitrare. Cercul* MPB *taie tangenta în* B *la cercul* ABM *în* β; *dreptele* Pβ, AB *se taie în* B′ *pe cereul* AMP.

2°. Să facem o transformare prin inversiune figurii 1°, de centru P, care să păstreze cercul circumscris: se obține, urmărind punct cu punct: M *fiind un punct pe cercul circumscris triunghiului* ABC, *iar* P, *arbitrar în plan,* MB *și* MC *taie cercul* PBC *în* β *și* γ; Pβ *și* Pγ *retaie cercurile* APC *și* APB *respectiv în* B′ *și* C′. *Punctele* A, M, B′, C′ *sunt colineare.*

Cazurile particulare, care nu sunt decât inversele precedentelor, urmează în aceeași ordine și circumstanțe:

a. M *fiind pe cercul circumscris triunghiului* ABC *și* P *pe* AM, MB *și* MC *retaie cercul* PBC *în* β *și* γ; *cercurile* PAC *și* PAB *sunt tangente în* P *respectiv la* Pβ *și* Pγ.

b. *Fie* M *un punct pe cercul circumscris triunghiului* ABC, *iar* P *oarecare pe* BM. MC *taie cercul* PBC *în* γ *și* Pγ *taie cercul* PAB *în* C′, *iar tangenta în* P *la cercul* PBC *taie cercul* PAC *în* B′, *punctele* A, M, B′, C′ *sunt colineare.*

c. *In triunghiul* ABC *fie* M *un punct pe cercul circumscris și* P *un punct pe latura* AC. *Paralelele duse prin* P *la* MB *și* MC *taie respectiv cercurile* APC *și* APB *în* B′ *și* C′. *Punctele* A, M, B′, C′ sunt colineare.

d. *Fiind dat un triunghiu* ABC, *iar* P *un punct arbitrar în plan, laturile* AB, AC *retaie cercul* BPC *în* β *și* γ; Pβ *și* Pγ *retaie cercurile* APC *și* APB *în* B′ *și* C′; *punctele* A, B′, C′ *sunt pe o dreaptă tangentă în* A *la cercul circumscris.*

e. *Fie* P *un punct pe latura* BC *a triunghiului* ABC; *paralelele duse prin* P *la* AB *și* AC, *taie cercurile* APC *și* APB *respectiv în* B′ *și* C′. *Punctele* A, B′, C′ *sunt pe o dreaptă tangentă în* A *la cercul circumscris triunghiului* ABC.

f. *Fie* P *un punct arbitrar în planul triunghiului* ABC; *tangenta în* B *la cercul circumscris, taie cercul* PBC *în* β, *iar* Pβ *retaie cercul* APC *în* B′ *pe latura* AB.

g. *Fie* B, C, M, P *patru puncte oricum,* MC *taie cercul* BPC *în* γ; Pγ *taie cercul trecând prin* P *și tangent în* B *cercului* MBC, *în* B′ *pe* MB.

h. *Fie* A, B, M, P *patru puncte oricum;* MB *taie cercul trecând prin* P *și tangent în* B *cercului* ABM, *în* β; Pβ *taie cercul* APB *în* B′ *pe* AM.

3°. Să facem o transformare prin inversiune de centru M; cercul circumscris devine o dreaptă, iar P rămâne arbitrar. Se obține: *Fie trei puncte* A, B, C *în linie dreaptă, iar* M *și* P *două puncte arbitrare.* PB *și* PC *taie cercul* MBC *în* β *și* γ. *Cercurile* MPβ *și* MAC *se retaie în* B′, *iar* MPγ *și* MAB *în* C′; *punctele* A, P, B′, C′ *sunt în linie dreaptă.*

Cazuri particulare:

a. A, B, C *fiind puncte pe o dreaptă,* M *în plan, iar* P *pe* AM, *dreptele* PB, PC *taie cercul* MBC *în* β *și* γ; *perechile de cercuri* MPβ, MAC *și* MPγ, MAB *sunt tangente respectiv în* M.

b. *Fie* A, B, C *trei puncte pe o dreaptă,* M *arbitrar în plan, iar* P *un punct pe* BM. PC *taie cercul* MBC *în* γ *și cercurile* MPγ, MAB *se taie în* C′; *iar cercul trecând prin* P *și tangent în* M *la* MBC *taie cercul* AMC *în* B′. *Punctele* A, P, B′ C′ *sunt colineare.*

c. A, B, C *fiind trei puncte pe o dreaptă,* M *arbitrar, iar* P *pe cercul* MBC; *cercul tangent în* P *la* PB *și trecând prin* M, *taie cercul* AMC *în* B′, *iar cercul tangent în* P *la* PC *și trecând prin* M *retaie cercul* AMB *în* C′. *Punctele* A, P, B′, C′ *sunt colineare.*

d. Când A e la infinit pe BC′, obținem: *Fie* B, C, M, P *patru puncte arbitrare,* PB *și* PC′ *taie cercul* MBC *în* β *și* γ. *Cercul* MPβ *taie pe* MC′ *în* B′ *și cercul* MPγ, *pe* MB *în* C′.

Punctele P, B′, C′ *sunt colineare pe o paralelă la* BC.

e. *Fie* B, C, M, P *patru puncte conciclice; cercurile trecând prin* M *și tangente în* P, *unul la* BP, *altul la* PC, *taie pe* MC *respectiv* MB *în* B′ *și* C′. *Punctele* P, B′, C′ *sunt pe o paralelă la* BC.

f. Când B e la infinit pe BC: M, P, A *și* C *fiind patru puncte arbitrare, paralela din* P *la* AC, *taie pe* MC *în* β *și cercurile* MPβ, MAC *se taie în* B′ *pe* AP.

g. *Fie* B, C, M *și* P *patru puncte arbitrare;* PC *taie cercul* MBC *în* γ: *cercul* MPγ *taie cercul trecând prin* M *și tangent în* B *la* BC *în* C′ *pe* BP.

h. *Fie* A, B, M, P *patru puncte oricum;* PB *taie cercul trecând prin* M *și tangent în* B *la* AB, *în* β; *cercurile* PMβ, AMB *se taie în* B′ *pe* AP.

4°. Intr'o inversiune de centru A: *Fie* M, B, C *trei puncte pe o dreaptă, iar* A *și* P *puncte arbitrare în plan. Cercurile* MPB *și* MPC *retaie cercul* ABC *în* β *și* γ. *Cercul* APβ *taie dreapta* AC *în* B′ *și cercul* APγ, *taie latura* AB *în* C′. *Punctele* M, P, B′, C′ *sunt colineare.*

a. M, B, C *fiind puncte pe o dreaptă,* A *în plan, iar* P *pe* AM, *cercurile* MPB, MPC *taie cercul* ABC *în* β *și* γ; *cercurile* APβ *și* APγ *sunt respectiv tangente la* AC *și* AB.

b. *Fie* M, B, C *trei puncte pe o dreaptă;* A *arbitrar, iar* P *un punct pe cercul* ABM; *cercul* MPC *taie cercul* ABC *în* γ *și cercul* APγ *taie dreapta* AB *în* C′; *iar cercul trecând prin* P *și tangent în* A *cercului* ABC, *taie pe* AC *în* B′; *punctele* M, P, B′, C′ *sunt colineare.*

c. *Fie* M, B, C *trei puncte pe o dreaptă,* A *arbitrar, iar* P *un punct pe cercul* ABC; *cercurile trecând prin* A *și tangente în* P *respectiv la cercurile* MBP *și* MCP, *taie laturile* AC *respectiv* AB *în* B′ *și* C′; *punctele* M, P, B′, C′ *sunt colineare.*

d. Identic ca la 3° d.

e. Identic ca la 3° e.

f. Când B e la infinit pe BC: *Fie* A, P, M, C *patru puncte oricum în plan; cercul* PMC *taie pe* AC *în* γ; *cercul* APγ *taie paralela din* A *la* MC *în* B′, *situat pe* MP.

h. *Fie* A, B, M, P *patru puncte arbitrare; cercul* MPC *taie cercul trecând prin* A *și tangent în* B *la* MB, *în* β; *cercul* APβ *taie dreapta* AB *în* B′ *pe* MP.

5°. Intr'o inversiune asimetrică de centru B: *Fie* A, M, C′ *trei puncte pe o dreaptă, iar* B *și* P *arbitrare;* MP *taie pe* BC *în* β; *cercurile* BPβ *și* ABC *se taie în* B′; *apoi cercul* MPC *taie pe* BC *în* γ; *cercul* BPγ *taie pe* AB *în* C′, *punctele* A, M, P, B′, C′ *sunt conciclice.*

a. A, M, C *fiind trei puncte pe o dreaptă,* B *arbitrar și* P *un punct pe cercul* AMB, *dreptele* PM *și* BC *se taie în* β *și cercul* PMC *taie pe* BC *în* γ. *Cercurile* ABC, BPβ *sunt tangente și* AB *este tangentă cercului* BPγ.

b. *Fie* A, M, C *trei puncte pe o dreaptă,* B *arbitrar și* P *oricum pe* BM; *cercul* PMC *taie pe* BC *în* γ *și cercul* BPγ *taie pe* AB *în* C′; *cercul trecând prin* P *și tangent în* B *la* BC, *taie cercul* ABC *în* B′; *punctele* A, M, P, B′, C′ *sunt conciclice.*

c. *Fie* A, M, C *trei puncte pe o dreaptă,* B *exterior și* P *un punct pe* BC; *cercul trecând prin* B *și tangent în* P, *primul la* MP, *al doilea la cercul* MPC, *taie cercul* ABC *respectiv dreapta* AB *în* B′ *și* C′. *Punctele* A, M, P, B′ *și* C′ *sunt conciclice.*

d. *Fie* A, C, P *și* B *patru puncte oricare;* AP *taie pe* BC *în* β; *cercurile* BPβ, ABC *se taie în* B′; *cercul* APC *taie pe* BC *în* γ; *cercul* BPγ *taie pe* AB *în* C′; *punctele* A, P, B′, C′ *sunt pe un cerc tangent în* A *la* AC.

e. *Fie un triunghiu* ABC *și* P *un punct pe* BC; *cercurile trecând prin* B *și tangente, unul la* AP, *altul la cercul* APC, *taie cercul* ABC, *respectiv dreapta* AB *în* B′ *și* C′; *punctele* A, P, B′, C′ *sunt pe un cerc tangent în* A *la* AC.

f. Când M tinde către infinit pe AC: A, B, C, P *fiind patru puncte oricare, paralela din* P *la* AC *taie pe* BC *în* β; *cercurile* BPβ *și* ABC *se taie în* B′ *pe* AP.

g. Identic cu 1° a.

h. Reciproca precedentei.

i. Dacă A și C se confundă: *Fie* M, P, B, C *patru puncte oricare; dreptele* MP *și* BC *se taie în* β; *cercul* BPβ *taie cercul trecând prin* B *și*

tangent în C *la* MC, *în* B′ ; *punctele* M, P, C, B′ *sunt conciclice.*

6°. In fine, dacă se face o inversiune, în raport cu un punct oricare de pe cercul circumscris sau arbitrar, se obține : *Fie* A, B, C, M *patru puncte pe o dreaptă sau conciclice, iar* O *și* P *arbitrare în plan ; cercul* MPB *taie cercul* BOC *în* β, *iar cercul* POβ *taie cercul* AOC *în* B′, *analog se obține* C′ ; *punctele* A, M, P, B′, C′, *sunt conciclice.*

Și toate particularizările care decurg.

NOTE MATEMATICE

1. — *Sur des carrés curieux.*

1. Nous avons déjà signalé des systèmes de numération, de bases B′ et B″, dans lesquels des nombres de quatre chiffres, des formes $a\,a\,b\,b$ et $a\,b\,b\,a$ sont les carrés de nombres de deux chiffres $c\,c$ et $d\,d$.[1]

Exemples. B′ = 10. N = 7744 = $(88)^2$.

B″ = 20. N = 9669 = $(\overline{13}\,\overline{13})^2$.

2. **Problème.** *Dans quel système de numération, un nombre de quatre chiffres de la forme $a\,b\,a\,b$ peut-il être le carré d'un nombre de deux chiffres $c\,c$?*

En décomposant en ses divers ordres d'unités un nombre de quatre chiffres $N = a\,b\,a\,b$, écrit dans la base B, ce qui donne

$$N = a\,b\,a\,b = a\,B^3 + b\,B^2 + b\,B + a,$$

on en déduit que

$$(1)\quad N = a\,b\,a\,b = (B^2+1).(a\,B+b) = c^2.(B+1)^2,$$

et réciproquement.

Cette condition pouvant s'écrire

$$(B+1)^2.(a\,B+b) - 2\,B.(a\,B+b) = c^2.(B+1)^2,$$

le nombre B+1, premier avec B, divise nécessairement $2(a\,B+b)$, ainsi que $2(b-a)$, puisque

$$2(a\,B+b) = 2[a(B+1)+b-a].$$

Les nombres a et b n'ayant qu'un chiffre,

$$(2)\quad B+1 = 2(b-a), \qquad B = 2(b-a)-1.$$

[1]) *Mathesis*, 1933—388.

Il en résulte que

$$(3)\quad B^2+1 = (B+1)^2 - 2B = 2[2(b-a).(b-a-1)+1]$$

$$(4)\quad a\,B+b = 2a(b-a) - a + b = (2a+1).(b-a).$$

En introduisant ces valeurs de B^2+1 et $a\,B+b$ dans la relation (1), il vient, après réductions, en supposant que $b-a \neq 0$,

$$c^2 = (2a+1).(b-a-1) + \frac{2a+1}{B}.$$

Par suite,

$$(5)\quad 2a+1 = M.B, \text{ et } B = 2a+1, \text{ car } 2a+1 < 2B.$$

En definitive, en vertu de (2) et (5), pour que le problème admette une solution, il faut et il suffit que l'on ait

$$2a+1 = 2(b-a)-1, \quad \text{soit} \quad b = 2a+1 = B,$$

ce qui est absurde, car $b < B$.

On en conclut *qu'il n'existe aucun système de numération dans lequel un nombre de quatre chiffres* $N = a\,b\,a\,b = (c\,c)^2$, *étant donné que* a, b, c *doivent être des nombres qui ne sont pas tous égaux entre eux.*

N. B. Si $a = b$, on a successivement

$$(B^2+1).a.(B+1) = c^2.(B+1)^2$$

$$a.(B^2+1) = c^2.(B+1) = a(B+1^2 - 2aB;$$

$B+1$ divise donc $2a$, et

$$B = 2a-1,$$

$$c^2 = \frac{1}{2}(B^2+1) = 2a^2 - 2a + 1 = (a-1)^2 + a^2.$$

Les valeurs de c et de a sont donc comprises parmi les nombres des suites connues[1]

5, 29, 169, 985, . . . ,

et

4, 21, 120, 697, ...

Les deux premières valeurs de c et a pour lesquelles le nombre $N = a\,a\,a\,a = (c\,c)^2$, sont

$c = 5$, $a = 4$, $N = 4444 = (55)^2$, $(B = 7)$

$c = \overline{29}$, $a = \overline{21}$, $N = \overline{21}\,\overline{21}\,\overline{21}\,\overline{21} = (\overline{29}\,\overline{29})^2$, $(B = 41)$

Les *seuls* carrés $N = a\,b\,a\,b = (c\,c)^2$ sont donc de la forme $N = a\,a\,a\,a = (c\,c)^2$.

V. THÉBAULT
(LE MANS, FRANCE)

[1]) *V. Thébault*, *Mathesis*, 1933—391.

2. — *Une manière d'obtenir des solutions entières de l'équation* $x^{2\alpha}+y^{2\alpha}=z^2+t^2$, α *étant un entier positif quelconque.*

Posons $x^\alpha=X$, $y^\alpha=Y$, il vient

$$X^2+Y^2=z^2+t^2$$

dont la solution générale est donnée par

$$\begin{cases} X=mp+nq; & z=mp-nq \\ Y=mq-np; & t=mq+np \end{cases}$$

Donc,

$$\begin{cases} mp+nq=x^\alpha \\ mq-np=y^\alpha \end{cases}$$

En résolvant ce système par rapport à p et q, nous trouvons

$$p=\frac{mx^\alpha-ny^\alpha}{m^2+n^2} \qquad q=\frac{mx^\alpha+ny^\alpha}{m^2+n^2}.$$

On aura finalement:

$$x^{2\alpha}+y^{2\alpha}=\left[\frac{(m^2-n^2)x^\alpha-2mny^\alpha}{m^2+n^2}\right]^2+\left[\frac{(m^2-n^2)y^\alpha+2mnx^\alpha}{m^2+n^2}\right]^\alpha.$$

Posant $m^2+n^2=z^\alpha$, équation qu'on sait résoudre pour toute valeur entière et positive de α on aura:

$$(xz)^{2\alpha}+(yz)^{2\alpha}=[(m^2-n^2)x^\alpha-2mny^\alpha]^2+[(m^2-n^2)y^\alpha+2mnx^\alpha]^2.$$

Par exemple, pour $\alpha=2$, nous avons pour la solution générale de

$$m^2+n^2=z^2;\ m=r^2-s^2,\ n=2rs,\ z=r^2+s^2.$$

Une solution générale de $x^4+y^4=z^2+t^2$ peut alors s'écrire

$$[x(r^2+s^2)]^4+[y(r^2+s^2)]^4=$$
$$[r^4+s^4-6r^2s^2)x^2-4(r^2-s^2)rsy^2]^2$$
$$[r^4+s^4-6r^2s^2)y^2+4(r^2-s^2)rsx^2]^2.$$

Cette solution renferme 4 paramètres arbitraires r, s, x et y.

Elle permet d'obtenir une infinité de solutions numériques de l'équation proposée sans toutefois es donner toutes.

Exemples numériques.

$x=1,\ y=2,\ r=2,\ s=1,\ (m=3,\ n=4,\ z=5)$

$$5^4+10^4=103^2+4^2\ (=10.625)$$

$x=1,\ y=2,\ r=2,\ s=3\ \ (m=5,\ n=12,\ z=13)$

$$13^4+26^4=361^2+596^2\ (=485.537).$$

Remarque. Si nous permutons x et y, nous obtenons une solution des système diophantine

$$x^4+y^4=z^2+t^2=u^2+v^2.$$

Exemples. $5^4+10^4=103^2+4^2=89^2+52^2$

$$13^4+26^4=361^2+596^2=356^2+599^2.$$

A. GLODEN
(Luxembourg)

BIBLIOGRAFIE

1. *Gazeta Matematică*, anul XLII, No 6, Februarie 1937. Asupra razelor de curbură ale unor curbe plane, de *R. Goormaghtigh*. Asupra unor numere pitagorice, de *V. Thébault*. Triunghiuri triomologice cu centrele de omologie colineare, de *Gh. D. Simionescu*. Noţiuni de geometrie cinematică, de *Eugen Vişa*.

2. *Boletin Matematico*, an. IX, No. 9, Noemvrie 1936, Buenos Aires Asupra numerilor prime, de *R. Noguera*. Cazuri speciale a ecuaţiilor simultane (concluziuni), de *A. Moessner*. Note matematice; bibliografie; probleme rezolvate şi propuse.

3. *Revista Cercului de Studii şi a Asociaţiei absolvenţilor Şcoalei Superioare P. T. T., Timişoara*. Conţine articole de specialitate şi o pagină matematică.

4. *Revista de Ciencias*, anul XXXVIII, No. 418, Lima, Decemvrie 1936. Conţine următoarele articole de matematică: Asupra reprezentării conforme a domeniilor plane, variabil limitate, de *Albredo Rosemblatt*. Asupra unei varietăţi algebrice cu trei dimensiuni cu secţiuni iperplane bicanonice, de *Lucien Godeaux*. Ecuaţiuni diferenţiale de primul ordin cu integrale mărginite, de *Michel Petrovitch*. O formulă ce proporţionează numerile prime, de *Mario O. Gonzales*. Integrarea unei ecuaţiuni diferenţiale de primul ordin şi polinoamele lui *Hermite*, care i se ratasează, de *Dragoslav S. Mitrinovitch*. Asupra derivatelor prin raport la oarecari parametri a unei integrale a ecuaţiei cu derivate parţiale de al 2-lea ordin cu două variabile independente, $s=\Phi(x, y, z, p, q)$, de *R. H. Germay*. Câteva metode particulare pentru a stabili teoreme inverse a procedeelor de însumare, de *J. Karamata*.

5. *Cadastru*, broşura Asociaţiei inginerilor cadastrali din Banat, anul II No. 1–2. Datoria noastră. Proecţiuni stereografice, de Prof. Ing. *I. Bonea*. Rectificarea curbelor de cale ferată, de Ing. *Ilie Malachi*. Istoricul geodeziei, de Ing. *I. Suhov*. Ridicări subterane, de Ing *I. Sarmeş*. Triangulaţie, de Prof. Ing. *I. Bonea*. Pagini pentru săteni, de *D. Dumitrache*.

6. *Jose Barral Souto*. Sobre el problema de la tasa del interés en las rentas ciertas. (De la Revista de Ciencias economicas, Febrero de 1936.)

7. *J. Curea.* Anwendung der Brunsschen Methode der Teilungsfehlerbestimmung. (Astronomische Nachrichten 1933, Kiel)

8. *J. Curea.* Rattachement de deux clichés dont les centres coïncident avec les pôles célestes de deux dates différentes. (Extrait du Journal des Observateurs, 1936, Marseille).

9. *C. Jacob.* Sulla biforcazione di una vena liquida dovuta a un ostacolo circolare. (Estratto dal vol. XXIV, dicembre 1936. Rendiconti della R Accademia Nazionale dei Lincei).

PROBLEME REZOLVATE

195[1]. — *Se scufundă la fundul unui bazin cu apă (densitatea 1) o mică sferă de lemn de densitatea 0,4 dându-i-se drumul fără viteză iniţială. Distanţa de la fundul bazinului la suprafaţa liberă a apei fiind de 10 m., să se determine:*

1°. *Acceleraţia mişcărei, ştiind că acceleraţia locului pentru un corp în cădere liberă este de 980 c. m.*

2°. *Viteza, când sfera ajunge la suprafaţă şi timpul întrebuinţat de la fund la suprafaţă.*

3°. *La ce înălţime ar sări sfera în aer, dacă am neglija adeziunea şi rezistenţa aerului.*

4°. *După stabilirea echilibrului, care este raportul între partea cufundată în apă şi cea din aer.*

5°. *Greutatea ce ar trebui adăugată sferii ca să se cufunde complect în lichid.*

C. STANCESCU

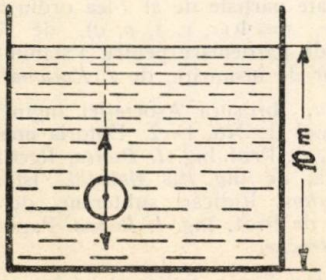
Soluţia. 1°. Fie v volumul sferei, δ densitatea apei, δ' densitatea lemnului, m masa sferei şi γ acceleraţia căpătată de sfera de lemn.

Asupra sferei, în momentul când este lăsată liberă, lucrează următoarele două forţe:

$+ v\,\delta =$ împingerea apei,

şi

$- v\,\delta' =$ greutatea sferei.



[1]) La pagina 142, Vol. II s'a imprimat din eroare No. 295.

Se ştie după teorema lui *D'Alembert* că *momentul de inerţie este egal cu suma forţelor exterioare*, adică

$$\sum F = m\frac{d^2 s}{d t^2},$$

sau pentru cazul problemei

$$v\,\delta - v\,\delta' = m\gamma = \frac{v\,\delta'}{g}\gamma,$$

de unde se scoate

$$(1) \qquad \gamma = g\cdot\left(\frac{\delta}{\delta'} - 1\right).$$

Inlocuind în (1) literile prin valorile numerice din enunţ, se găseşte

$$\gamma = 980\left(\frac{1}{0{,}4} - 1\right) = 980 \times \frac{0{,}6}{0{,}4}$$

*** $\boxed{\gamma = 1470 \text{ cm/sec.}^2}$

2°. Presupenând că v este viteza cerută, se ştie că în general în mişcarea uniform accelerată, avem:

$$v = \sqrt{2\gamma s}$$

de unde, pentru aplicaţiunea dată

$$v = \sqrt{2 \times 1470 \times 1000}$$

*** $\boxed{v = 1714 \text{ cm/sec.}}$

Spaţiul s în mişcarea uniform accelerată este dat de ecuaţia

$$s = s_0 + v_0 t \pm \frac{1}{2}\gamma t^2,$$

în care s_0 şi v_0 sunt spaţiul şi viteza iniţială. In cazul problemei

$$s_0 = v_0 = 0; \qquad s = 10 \text{ m},$$

iar γ este calculat la 1°, deci

$$t = \frac{\sqrt{2 \times S}}{\sqrt{\gamma}} = \sqrt{\frac{2 \times 1000}{1470}}$$

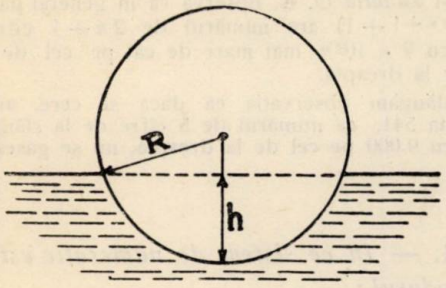
*** $t = 1'',16.$

3°. Când sfera ajunge la suprafaţa apei, s-a văzut la 2°, că are viteza 1714 cm/sec., deci dacă nu ar fi rezistenţa s-ar mişca pe verticala sa, descriind în sus un spaţiu. s_1, dat de formula

$$s_1 = \frac{v_0^2}{2g} = \frac{1714^2}{2 \times 980}$$

$\dot{*}\dot{*}$ $\boxed{s_1 = 1498{,}8 \text{ cm.}}$

4°. Fie h înălțimea calotei scufundate în apă și R raza sferei. Pentru echilibru, greutatea sferei trebuie să fie egală cu greutatea volumului de apă dezlocuit de calotă.



Deci

$$\frac{4\pi R^3}{3}\delta' = \frac{\pi h^2}{3}(3R - h)\delta,$$

sau punând

$$x = \frac{R}{h}$$

și făcând toate calculele, se găsește ecuațiunea

$$1{,}6x^3 - 3x + 1 = 0$$

$\dot{*}\dot{*}$ (2) $\qquad x^3 - 1{,}875x + 0{,}625 = 0,$

care are toate rădăcinile reale, două negative și una pozitivă, aceasta din urmă cuprinsă între 1 și 2. Deci $R > h$. Din punct de vedere aritmetic al aplicațiunei, nu vom considera de cât rădăcina pozitivă.

Raportul cerut în problema este

(3) $\qquad k = \frac{2R - h}{h} = 2 \times x - 1.$

Calculând rădăcina pozitivă a ecuațiunei (1) prin metoda interpolării se găsește

$$1{,}15 < x < 1{,}16.$$

Pentru aceste valori duse în (3) se găsește

$$0{,}30 < k < 0{,}32.$$

5°. Greutatea, care trebue adăugată sferei pentru a se confunda complect, este egală cu greutatea unui volum de apă egal cu volumul sferei nescufundate de la 4°. Fie A acea greutate. Avem

$$A = \left[\frac{4\pi R^3}{3} - \frac{\pi h^2}{3}(3R - h)\right]\delta$$

$\dot{*}\dot{*}$ $\qquad A = \frac{\pi R^3}{3}\left[4 - 3\frac{h^2}{R^2} + \frac{h^3}{R^3}\right]\delta$

$\dot{*}\dot{*}$ $\qquad A = \frac{\pi R^3}{3}\left[\frac{1}{x^3} - \frac{3}{x^3} + 4\right]\delta$

unde x este rădăcina admisibil, aritmetică, a ecuațiunei (2).

Gh. B.

541. — *Să se gasiască patratele perfecte de zece cifre, astfel ca numerele formate din primele lor cinci cifre, să fie cu 9.000 de unități mai mari ca numerele formate din ultimele lor cinci cifre.*

N. G. BOTEA

Fie N^2 patratul de 10 cifre cerut. Avem

$$1000000000 < N^2 \leq 9999999999$$

$\dot{*}\dot{*}$ (1) $\qquad 31622 < N < 100000.$

Dacă n este un număr de 5 cifre, atunci conform enunțului, trebue determinate numerile N și n astfel în cât

$$N^2 = (n + 9000) \times 1000000 + n$$

$\dot{*}\dot{*}$ $\qquad N^2 = 100001 \times n + 30000^2$

$\dot{*}\dot{*}$ (2) $\qquad (N + 30000)(N - 30000) = 11 \times 9091 \times n.$

Fie α, β două numere întregi așa în cât

(3) $\qquad \alpha \times \beta = n.$

Relațiunea (2) se poate satisface în următoarele 3 cazuri:

Cazul 1. Avem

$$1^0 \quad \begin{cases} N + 30000 = 9091 \times \alpha \\ N - 30000 = 11 \times \beta. \end{cases}$$

Conform condiției (1) trebue ca

$$31622 < 9091 \times \alpha - 30000 < 100000$$

$\dot{*}\dot{*}$ (4) $\qquad 6 < \alpha \leq 14.$

Pe de altă parte din relațiunile 1° se scoate

$$9091 \times \alpha - 60000 = 11 \times \beta$$

$\dot{*}\dot{*}$ $\qquad 11(826 \times \alpha - 5454) + 5\alpha - 6 = 11 \times \beta,$

care este posibilă în numere întregi numai dacă $5\alpha - 6$ se divide prin 11. Dintre valorile lui α definite de (4), numai

$$\alpha = 10$$

satisface această condiţiune. Avem deci soluţia

$$\boxed{60910^2 = 3710028100}$$

unde

$$37100 = 28100 + 9000.$$

Cazul 2. Avem

$$2^0 \quad \begin{cases} N + 30000 = 11 \times \alpha \\ N - 30000 = 9091 \times \beta. \end{cases}$$

Ca la cazul 1., va trebui ca

$$31622 < 9091 \times \beta + 30000 < 100000$$

$$\overset{*}{*}\overset{*}{*} \qquad 0 < \beta < 7.$$

Apoi din

$$(5) \qquad 9091 \times \beta + 60000 = 11 \times \alpha$$

se găseşte că β dat de (5) trebue să facă pe $5\beta + 6$ divizibil prin 11. Singura valoare, care satisface această condiţiune, este

$$\beta = 1,$$

care dă soluţia

$$\boxed{39091^2 = 1528106281}$$

unde

$$15281 = 06281 + 9000.$$

Cazul 3. Trebue să avem

$$3^0 \quad \begin{cases} N + 30000 = 100001 \times \alpha \\ N - 30000 = \beta \end{cases}$$

Ca şi la cazurile precedente, avem succesiv

$$31622 < 100001\,\alpha - 30000 < 100000$$

$$0 < \alpha \leqq 1 \qquad \overset{*}{*}\overset{*}{*} \quad \alpha = 1,$$

care dă soluţia

$$\boxed{70001^2 = 4900140001}$$

cu

$$49001 = 40001 + 9000.$$

Se vede că soluţia de la cazul 2., are numărul 06281 formal de 5 cifre, deci este o soluţie condiţionată de restricţia de a admite că 06281 este număr de 5 cifre. Altfel problema admite numai două soluţiuni.

Observaţiuni. 1°. Au găsit cele 3 soluţiuni d-nii: *Dănciulescu Gr. V.*; *Ghişoiu I. P.* şi *Zaharia O. N.*

2°. A găsit soluţiile 39091 şi 70001, d-l: *Panţu Z. I.*

3°. Au găsit soluţiile 60910 şi 70001, d-nii: *Cristescu I.*, *Iordănescu D.*, *Pavel H. N.* şi *Popa Gh. Ion.*

4°. D-l *Sprinceană Gh.* a dat numai soluţia 60910.

5°. Au găsit numai soluţia 70001, d-nii: *Bordeianu Ad.*, *Costăchescu V. C.*, *Dimitriu Gh. Şt.*, *Iovănescu Dan*, *Savin C. I.* şi *Vasiliu Gh. Gh.*

6°. D-l *Panţu Z. I.* observă că problema e analoagă cu problema 2696 rezolvată în „Gazeta Matematică", Vol. XXXII, pag. 55, unde N^3 de 10 cifre se formează scriind după $n + 1000$ numărul n de 5 cifre.

7° D-l *Zaharia O. N.* observă că în general patratul lui $(7 \times 10^{2n+1} + 1)$ are numărul de $2n+1$ cifre de la stânga cu 9×10^{2n} mai mare de cât pe cel de $2n+1$ cifre de la dreapta.

8°. Adăugăm observaţia că dacă se cere, analog cu problema 541, ca numărul de 5 cifre de la stânga să întreacă cu 9.000 pe cel de la dreapta, nu se găseşte nici o soluţie.

Gh. B.

1491. — *În ce sistem de numeraţie este calculat produsul:*

$$121 \times 32 = 4312?$$

EUGEN VISA

Fie B baza sistemului de numeraţie cerut. Produsul din enunţ se poate scri astfel:

$$(B^2 + 2B + 1)(3B + 2) = 4B^3 + 3B^2 + B + 2,$$

sau

$$3B^3 + 8B^2 + 7B + 2 = 4B^3 + 3B^2 + B + 2.$$

Aceasta relaţie se mai poate scri:

$$B(B^2 - 5B - 6) = 0,$$

sau:

$$B(B + 1)(B - 6) = 0.$$

Rezolvind această ecuaţie avem:

$$B = 0, \quad B = -1, \quad B = 6.$$

Nu convine pentru problemă de cât $B = 6$. Produsul dat este deci calculat în baza 6.

Soluţii date de d-nii: *Amărăsteanu F. Marcel* (bacalaureat, Craiova), *Babeţiu Corneliu* (lic. Loga, Timişoara), *Begu I. Ştefan* (lic. Lazăr, Bucureşti), *Berinde L. Titus* (lic. Lugoj), *Cazanacli V. Petre* (Chişinău), *Florescu L. Victor* (lic. Milit., N. Filipescu), *Jidanu I. C-tin* (lic. Beiuş), *Kornis Ernest* (lic. Diaconovici Loga, Timişoara), *Matei D-tru Medeleanu Ion*, *Murgu V. Marţian*, *Negrea A. Leonte-Mircea* (Brăila), *Petrescu-Craiovita Anastasie* (Craiova), *Pompeiu Marica*, *Popoviciu Gavril*, *Rosemberg I.* (lic. Roman), *Stefănescu D. Nicolae* (lic. Milit, N. Filipescu), *Tilică C. Ştefan* şi *Zagaican Ilie* (Conductor de Lucrări Publice).

1499. — *Să se determine p astfel ca ecuaţia,*

$$76(2 - x)^2 = p(6 - x^2),$$

să aibă cel puţin o rădăcină cuprinsă între 0 şi 2.

G-L GH. BUICLIU

Dezvoltând calculele obținem ecuația de gradul al 2-lea:

$$(p-76)x^2-4(3p-76)x+4(9p-76)=0.$$

Notăm cu $f(x)$ primul membru al acestei ecuații și pentru ca ea să aibă o rădăcină cuprinsă între 0 și 2, trebuie ca $f(0)$ și $f(2)$ să fie de semne contrare, trebuie deci să avem:

$$(1) \qquad f(0)\,f(2)<0.$$

Dar,

$$f(0)=4(9p-76),$$

$$f(2)=4(p-76)-8(3p-76)+4(9p-76)=16p,$$

astfel că inegalitatea (1) devine:

$$4\times 16\,p(9p-76)<0.$$

Această inegalitate este echivalentă cu următoarele sisteme de inegalități:

$$(2)\quad \begin{cases} p<0 \\ 9p-76>0 \end{cases} \qquad (3)\quad \begin{cases} p>0 \\ 9p-76<0. \end{cases}$$

Sistemul (2) este incompatibil, iar sistemul (3) este satisfăcut pentru,

$$0<p<\frac{76}{9}.$$

Ecuația dată are deci cel puțin o rădăcină între 0 și 2, dacă luăm pentru p un număr cuprins între 0 și $\frac{76}{9}$.

Soluții date de d-nii: *Andrunachievici Vladimir* (bacalaureat, Chișinău), *Gloden A.* (Luxembourg), *Lupescu Gh. Corneliu* (Șc. Of. de Artilerie), *Moisovici M. Ștefan* (bacalaureat) și *Negrea A. Leonte-Mircea* (Brăila).

1503. — *Să se arate că într'un triunghiu oarecare avem relația:*

$$\sum[r_a(r_a+r_b)(r_a+r_c)]-3r_a r_b r_c=$$
$$(4R+r)^3-8Rp^2-2ps,$$

notațiile fiind cele obicinuite.

POMPEIU MARICA

Notând cu E primul membru al relației cerute, putem scri succesiv:

$$E=\sum[r_a(r_a+r_b)(r_a+r_c)-r_a r_b r_c]$$
$$=\sum r_a[(r_a+r_b)(r_a+r_c)-r_b r_c]$$
$$=\sum r_a[r_a^2+r_a(r_b+r_c)]=\sum r_a^2(r_a+r_b+r_c)$$
$$=(r_a+r_b+r_c)(r_a^2+r_b^2+r_c^2)$$
$$=(r_a+r_b+r_c)[(r_a+r_b+r_c)^2-2\sum r_a r_b]$$
$$=\sum(r_a)^3-2\sum r_a\sum r_a r_b.$$

Dar într'un triunghiu oarecare se cunosc relațiile

$$\sum r_a=4R+r,\quad \sum r_a r_b=p^2,\quad pr=s,$$

astfel că expresiunea lui E devine:

$$E=(4R+r)^3-2(4R+r)p^2=$$
$$(4R+r)^3-8Rp^2-2p^2r=(4R+r)^2-8Rp^2-2ps.$$

Astfel identitatea dată este stabilită.

Soluții date de d-nii: *Amărăşteanu F. Marcel* (bacalaureat, Craiova), *Apostol V. Radu* (lic. Milit., N. Filipescu), *Cotescu C-tin* (lic. Milit., Iași), *Florescu Victor, Kornis Ernest* (lic. Loga, Timișoara), *Lupescu Gh. Corneliu* (Șc. Of. de Artilerie), *Matei D. Dumitru* (lic. Internat, Iași), *Moişovici M. Ştefan* (bacalaureat), *Negrea A. Mircea* (Brăila), *Negulescu D. Ştefan* (lic. Milit., N. Filipescu), *Petrescu-Craioviţa Anastasie* (Craiova), *Popoviciu I. G.* (student), *Ripianu Andrei, Rosemberg I.* (lic. Arad), *Segal Zigu* (lic. Vaslui), *Ştefănescu Costin* (lic. Milit., N. Filipescu), *Ştefănescu D. Nicolae, Tica P. Marin-Gall* (Sub-Lt) și *Tilică C. Ştefan.*

1512. — *Notațiile fiind cele obicinuite într'un triunghiu, să se stabilească relația:*

$$\sum\frac{(a+b)^2}{r_a r_b}=4\left(\frac{R}{r}+2\right)$$

M. C. POSTELNICESCU

Considerăm relațiile cunoscute într'un triunghiu:

$$s=(p-a)r_a=(p-b)r_b=(p-c)r_c=pr,$$
$$s^2=p(p-a)(p-b)(p-c),\quad a+b+c=2p,$$
$$r_a+r_b+r_c=4R+r.$$

Notând cu E primul membru și având în vedere relațiile considerate, putem scri succesiv:

$$E=\frac{\Sigma(2p-c)^2(p-a)(p-b)}{s^2}=$$
$$\frac{\Sigma[p+(p-c)]^2(p-a)(p-b)}{s^2}=$$
$$\frac{\Sigma[p^2(p-a)(p-b)+2p(p-c)(p-a)(p-b)+(p-c)^2(p-c)(p-b)]}{s^2}$$

$$= \frac{\left[\frac{s^2 p}{p-c} + 2s^2 + \frac{s^2(p-c)}{p}\right]}{s^2} = \sum\left(\frac{p}{p-c} + \frac{p-c}{p}\right) + 6$$

$$= \sum\left(\frac{p}{p-c} - \frac{c}{p}\right) + 9 = \frac{p}{s}\sum r_c - \frac{1}{p}\sum c + 9$$

$$= \frac{p(r_a + r_b + r_c)}{s} - \frac{a+b+c}{p} + 9 =$$

$$\frac{4R+r}{r} + 7 = \frac{4R+8r}{r} = 4\left(\frac{R}{r} + 2\right).$$

Relaţia cerută este astfel stabilită.

Soluţii date de d-nii: *Amărăsteanu F. Marcel* (bacalaureat, Craiova), *Andrunachievici Al. Vladimir* (bacalaureat, Chişinău), *Apostol V. Radu* (lic. Milit., N. Filipescu), *Cotescu I. Costin*, *Florescu L. Victor* (lic. Milit., N. Filipescu), *Gloden A.* (Luxembourg), *Lupescu Gh. Corneliu* (Şc. Of. de Artilerie), *Matei D. D-tru*, *Negrea A. Leonte-Mircea* (Brăila), *Negulescu D. Ştefan* (lic. Milit., N. Filipescu), *Popescu Zorica N. Alexandru* (lic. Sf. Iosif, Bucureşti), *Ripianu Andrei* (lic. Braşov), *Segal Zigu* (lic. Vaslui), *Stefănescu Costin*, *Teodorescu N. Dorin* şi *Tilică C. Ştefan*.

PROBLEME PROPUSE

1562. — Să se afle patratele perfecte a două numere consecutive, a căror diferenţă este un patrat perfect de două cifre.

C-TIN JIDANU

1563. — Să se găsească numărul $\overline{ab}$, format din numerile a şi b, de câte n cifre, scrise unul după altul, ştiind că $\sqrt{\overline{ab}}$ este numărul zecimal a_1, b_1 în care a_1 se obţine din a sporindu-i toate cifrele cu 2, iar b_1 se obţine din b sporindu-i toate cifrele cu 1.

G-L GH. BUICLIU

1564. — Să se rezolve sistemul diofantian:

$$\begin{cases} x^2 + kt = u^2 \\ y^2 + lt = v^2 \end{cases}$$

Caz particular: $k = 7$, $l = 6$.

A. GLODEN

1565. — Să se arate că oricare ar fi n, avem:

$$0 < \frac{n^4 - n^3 + 7n + 6}{n^4 + 4n + 4} < 2.$$

I. CUREA

1566. — Se dă un cerc şi o tangentă Δ_1 la acest cerc. Să se determine două paralele Δ_2, Δ_3 la Δ_1, astfel ca cele trei arii în care este împărţit cercul să fie echivalente.

V. THÉBAULT

1567. — Fie ABCD un trapez isoscel, E şi F mijloacele laturilor paralele AB şi CD, I intersecţia diagonalelor AC şi BD.

Paralela la AB dusă prin I taie pe AD şi BC în G şi H, iar paralelele duse prin G la AC şi BD taie pe EF respectiv în L şi M.

1°. Să se arate că IG este bisectoarea unghiului AID.

2°. Dreapta AC împarte segmentul GM în părţi egale.

3°. Figura GMHL este un romb.

L-T. C. D. IONESCU-ŢIU

1568. — Se consideră un cilindru înscris într'o sferă cu raza R. Să se determine înălţimea cilindrului, astfel ca volumul cuprins între suprafaţa sferei şi suprafaţa laterală a celor două conuri cu vârful în centrul sferei şi bazele cele două baze ale cilindrului să fie egal cu volumul celor două calote sferice determinate de bazele cilindrului.

D. GEORGESCU

1569. — Intr'un triunghiu dreptunghiu ABC se duce înălţimea AD.

Fie r, r_1, r_2 respectiv razele cercurilor înscrise în triunghiurile ABC, ABD şi ACD. Să se demonstreze că avem relaţia,

$$cr_1 + br_2 = ar,$$

unde a este ipotenuza, iar b şi c catetele triunghiului ABC.

V. ALACI

Manuscrise primite de la corespondenții noștrii până la 10 a lunei curente și anume: Articole (A), Note (N), probleme propuse (P) și probleme rezolvate indicate prin numărul lor de ordine.

Amărăsteanu F. Marcel (P., 1445, 1529, 1535, 1537, 1546, 1549, 1550, 1551, 1552); *Anton G. George* (P., 1513, 1521, 1522, 1546, 1550, 1551, 1552, 1554, 1555, 1557); *Apostol Radu* (1541, 1543, 1559); *Babeţiu Corneliu* (1465, 1506); *Begu I. Ştefan* (1466, 1470, 1473, 1513, 1517, 1540, 1556); *Cioc I. D-tru* (1523, 1524, 1535); *Comloşan Cornelia* (1546, 1550); *Damsker Dorel* (P); *Florescu L. Victor* (1515, 1529, 1537, 1540); *Jidanu C-tin* (P., 1470, 1510, 1546, 1550); *Lăzărescu P. Stelian* (1541, 1543, 1549, 1552); *Matei D-tru* (1466, 1467, 1489, 1493, 1549); *Milu I. Nicolae* (1517, 1519, 1520, 1521, 1522, 1523, 1525, 1529, 1541, 1546, 1549, 1552, 1556); *Mititeanu Scipio* (1556); *Pascu V. Vasile* (1521); *Popoviciu I. Gabriel* (P., 1488, 1500, 1504, 1505); *Rădulescu Gh. Octavian* (P., 1510, 1516, 1525, 1526, 1530, 1535, 1537, 1540, 1541, 1542, 1546, 1548, 1549, 1550, 1555, 1559, 1561); *Ripianu Andrei* (1523, 1524, 1525, 1526, 1527, 1528, 1531, 1546, 1548, 1549, 1550, 1551, 1554, 1556); *Stefănescu Costin* (P., 1465, 1541, 1543, 1552, 1553, 1556); *Sternberg H.* (1548, 1559); *Tilică C. Ştefan* (1466, 1472, 1495, 1497, 1535, 1549, 1554); *Tutunaru D.* (P.); *Vlad C. I. Mihai* (1483, 1500, 1535, 1550); *Zamfirescu I. Gh.* (P.)

INFORMAŢIUNI

La Redacţiunea „Revistei Matematice din Timişoara" se primesc abonamente pentru:

BOLETIN MATEMATICO

ANUL AL X-LEA

care începe în Martie 1937.

Costul *special* a unui abonament este de 200 lei.

Această Revistă se publică în Buenos-Aires, Republica Argentina.

Pentru anul al X-lea care începe în Martie 1937, s'au primit până acum la Redacţia „R. M. T." următoarele abonamente:

1. Locotenent *Costăchescu Constantin,* Distrugătorul *„Regina Maria"*, Constanţa.
2. Profesor *I. Nemet,* Casa învăţătorilor, str. Remus, Timişoara.

Răspundem pe această cale, la toţi acei corespondenţi, care se plâng că anumite probleme nu le-au fost considerate, că aceasta se datoreşte sau faptului că acele soluţiuni au sosit întârziate, sau au fost greşite, sau n'au sosit de loc.

Evident că astfel de probleme nu pot fi luate, în seamă.

Legându-se colecţia R. M. T., anul XV, în volum şi rămânând numere răzleţe care nu au putut fi legate, putem trimete corespondenţilor noştri numere care eventual le lipsesc din colecţie în schimbul sumei de 10 lei. Doritorii se vor adresa administraţiei revistei, trimiţând suma prin mandat poştal.

SPHINX

Revue mensuelle des questions récréatives

FONDÉE EN 1931

REVUE UNIQUE DANS SON GENRE
dans le monde entier

ABONNEMENTS:
1 an: Belgique, **30 fr.** France, **25** fr.
Etranger, 7 **belgas**

Administration:
SPHINX, Bruxelles 75, Rue Philippe Baucq

Toţi cei ce ne trimet articole, note, probleme propuse sau rezolvate, pentru a fi luate în consideraţie, sunt obligaţi a fi abonaţi la Revista Matematică din Timişoara.

Anunţăm că nu vom mai lua în considerare problemele rezolvate, iscălite de mai mulţi corespondenţi. Fiecare corespondent trebue să-şi redacteze problema rezolvată de el, şi s'o iscălească.

Fiecare problemă rezolvată, notă sau articol trebuesc scrise pe sferturi de coale de hârtie şi însoţite de enunţ. Problemele propuse trebuesc însoţite şi de soluţiile lor.

Abonamentul pe anul XVII-lea al revistei, care începe cu numărul 1 la 15 Martie 1937, costă 100 (UNA SUTA LEI) şi se trimite prin contul CEC No. 85208, sau prin mandat postal pe adresa: Prof. C. TEODORESCU, rectorul Şcoalei Politechnice, Timişoara.

ANUL XVII. 15 APRILIE 1937 NO. 2.

REVISTA MATEMATICĂ

DIN

TIMIȘOARA

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA APARE ODATA PE LUNA.

PREȚUL UNUI NUMAR 12 LEI PREȚUL ABONAMENTULUI 100 LEI PE AN.

CUPRINSUL

1. LOCOT. C. V. COSTACHESCU: ASUPRA UNEI PROBLEME DE CINEMATICA NAVALA.

2. NOTE MATEMATICE: 3, 4, 5.

3. BIBLIOGRAFIE.

4. PROBLEME REZOLVATE: 929, 1455, 1458, 1465, 1470, 1500, 1508, 1510.

5. PROBLEME PROPUSE: 1570-1577.

6. INFORMATIUNI.

TIMISOARA

Institut de Arte grafice Tipografia Românească

„Orice profesor de matematici, din orice colţ al ţării şi de la orice şcoală, trebuie să fie apostol al specialităţii sale. Din felul cald şi luminos cum îşi face lecţiile, din drumul drept şi demn pe care îl urmează în viaţă, trebuie să apară limpede că judecata matematică precisă şi sigură, curată ca cristalul, are o înaltă şi admirabilă valoare educativă pentru viaţă.

Adevărul curat, adevărul drept, adevărul luminos, să fie îndreptarul vieţei noastre. Aceasta să fie contribuţia specialităţii noastre la îndrumarea neamului românesc, pe calea care-i stă deschisă".

G. ŢIŢEICA

Manuscrisele destinate Revistei Matematice din Timişoara conţinând soluţiunile problemelor propuse şi probleme, note sau articole originale vor fi trimise pe adresa: **V. Alaci,** profesor Şcoala Politechnică, Timişoara.

Plata abonamentului precum şi reclamaţiunile de neprimirea Revistei vor fi adresate d-lui **Prof. C. Teodorescu,** Rectorul Şcoalei Politechnice din Timişoara.

Plata abonamentului se face prin CEC (Casa de economii şi cecuri postale. unde revista are contul CEC No. 85208, sau prin mandat postal adresat d-lui Prof. C. TEODORESCU, Rectorul Şcoalei Politechnice din Timişoara.

Taxa de Membru în „Comitetul de Conducere al Revistei Matematice din Timişoara" este pentru anul XVII, de 200 (două sute) lei.

Colecţia R. M. T., se găseşte la Administraţia Revistei, şi se poate procura în schimbul preţului:

Anul I, epuizat. Anii: II—XVI inclusiv, broşate, 120 lei fiecare.

Rugăm pe corespondenţii nostrii, a ne trimete de urgenţă costul abonamentului de 100 (una sută) lei, pentru „R. M. T." pe anul XVII, care a început la 15 Martie 1937.

ANUL XVII — No. 2 TIMISOARA, 15 APRILIE 1937

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA

APARE LA 15 A FIECAREI LUNI

PREŢUL UNUI NUMAR . . . . . 12 LEI
ABONAMENT ANUAL . . . . . 100 LEI
Abonamentele sunt socotite totdeauna dela 15 Martie

REDACŢIA: Prof. V. ALACI
Şcoala Politechnică din Timişoara.
ADMINISTRAŢIA: Prof. C. TEODORESCU
Rectorul Şcoalei Politechnice din Timişoara.

ASUPRA UNEI PROBLEME DE CINEMATICA NAVALA

DE LOCOT C. V. COSTACHESCU

Inainte de a trata problema, voiu enunţa definiţia *Cinematicei Navale* şi câteva cunoştinţe preliminare.

Cinematica navală se ocupă cu rezolvarea problemelor de reperare şi de mişcare reciprocă a două unităţi (nave, unităţi tactice) în navigaţie. Această rezolvare se face în mod grafic pe hartă sau cu aparate speciale şi uneori prin calcule simple. Datele, pe care se bazează construcţia geometrică (calculul, etc.) pot fi cunoscute cu precizie, de multe ori însă vor fi numai apreciate cu o aproximaţie oarecare sau presupuse. Dar chiar şi în acest caz va fi mai avantajat acela, care procedează după anumite principii, faţă de acela, care lucrează fără plan. *(Cinematică Navală,* de D-l Lt. C-dor *Prossinagg Carol.)*

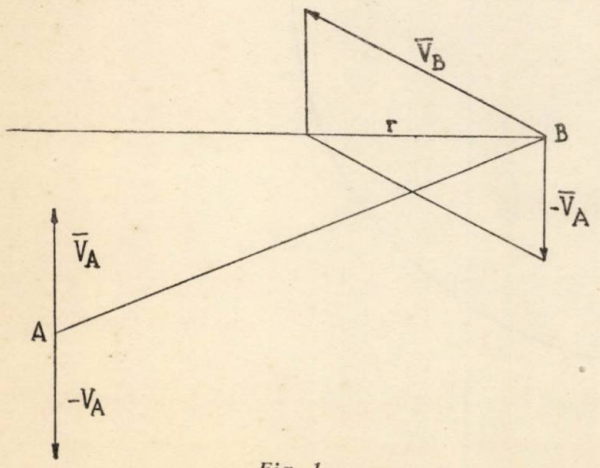


Fig. 1.

Mişcarea şi viteza relativă. Insemnăm (fig. 1) două nave cu A şi B, drumurile şi vitezele lor cu vectori $\overline{V}_A$, $\overline{V}_B$.

Deplasarea relativă a navei B faţă de nava A se obţine, considerând pe A fix şi adăogându-se la vectorul $\overline{V}_B$ pe $\overline{V}_A$ în sens invers.

Rezultanta $\overline{r}$, reprezintă mişcarea relativă a lui B faţă de A.

Dacă o navă N_1 ocupă la un moment dat poziţia B, deplasându-se cu un drum şi o viteză cunoscută, reprezentate în fig. 2 prin vectorul $\overline{V}_B$, se pune chestiunea următoare: *Care drum trebue să ia nava* N_2 *care se află în* A, *dispunând de viteza* $\overline{V}_A$, *pentru a se întâlni cu nava* (N_1) *pornită din* B?

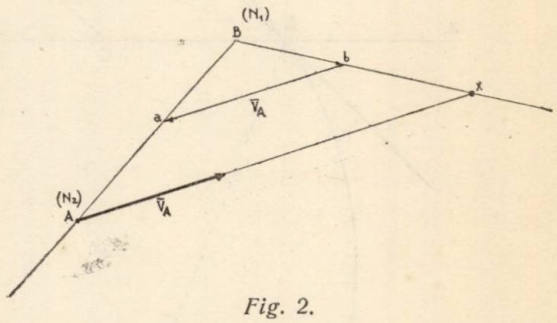


Fig. 2.

Rezolvarea problemei se bazează pe mişcarea relativă şi anume:

Intâlnirea va avea loc atunci, când rezultanta vitezelor ambelor nave, adică mişcarea relativă a lui B faţă de A, va trece prin A (distanţa minimă =0).

Această rezultantă se obţine astfel; din vârful vectorului $\overline{B}_B$ se trasează un arc de cerc cu raza $\overline{V}_A$, care taie linia de unire AB în *a*.

Paralela la linia obţinută *ab* trasată prin A, reprezintă drumul de urmat de către N_2 (drumul de goană sau coliziune).

Intersecţia acestei paralele cu drumul lui N_1, dă punctul de intâlnire X.

Timpul până la întâlnire se obţine impărţind AX prin $\overline{V}_A$, sau BX prin $\overline{V}_B$.

In cursul de *Clnematică Navală* al D-lui Lt. C-dor *Prossinagg Carol* este tratată următoarea problemă:

Fie x y drumul urmat de o escadră. In punctul A *se detaşează o navă, pentru a recunoaşte un punct* P *(port, insulă). Nava ajunsă în punctul* P, *va da goană escadrei, raliind-o în* E.

In ce punct va trebui detaşată nava pentru ca să stea un timp minim în recunoaştere.

Imi propun să dau o altă demonstraţie acestei probleme, fig. 3.

Fie $\overline{V}_E$ viteza escadrei, $\overline{V}_D$ viteza navei ce se detaşează, $x\,y$ drumul escadrei, P punctul unde se va face recunoaşterea. Presupunem că în momentul când escadra a ajuns într'un punct B, nava a ajuns la punctul P. Vom determina punctul B, astfel ca să stea minimum de timp în detaşare.

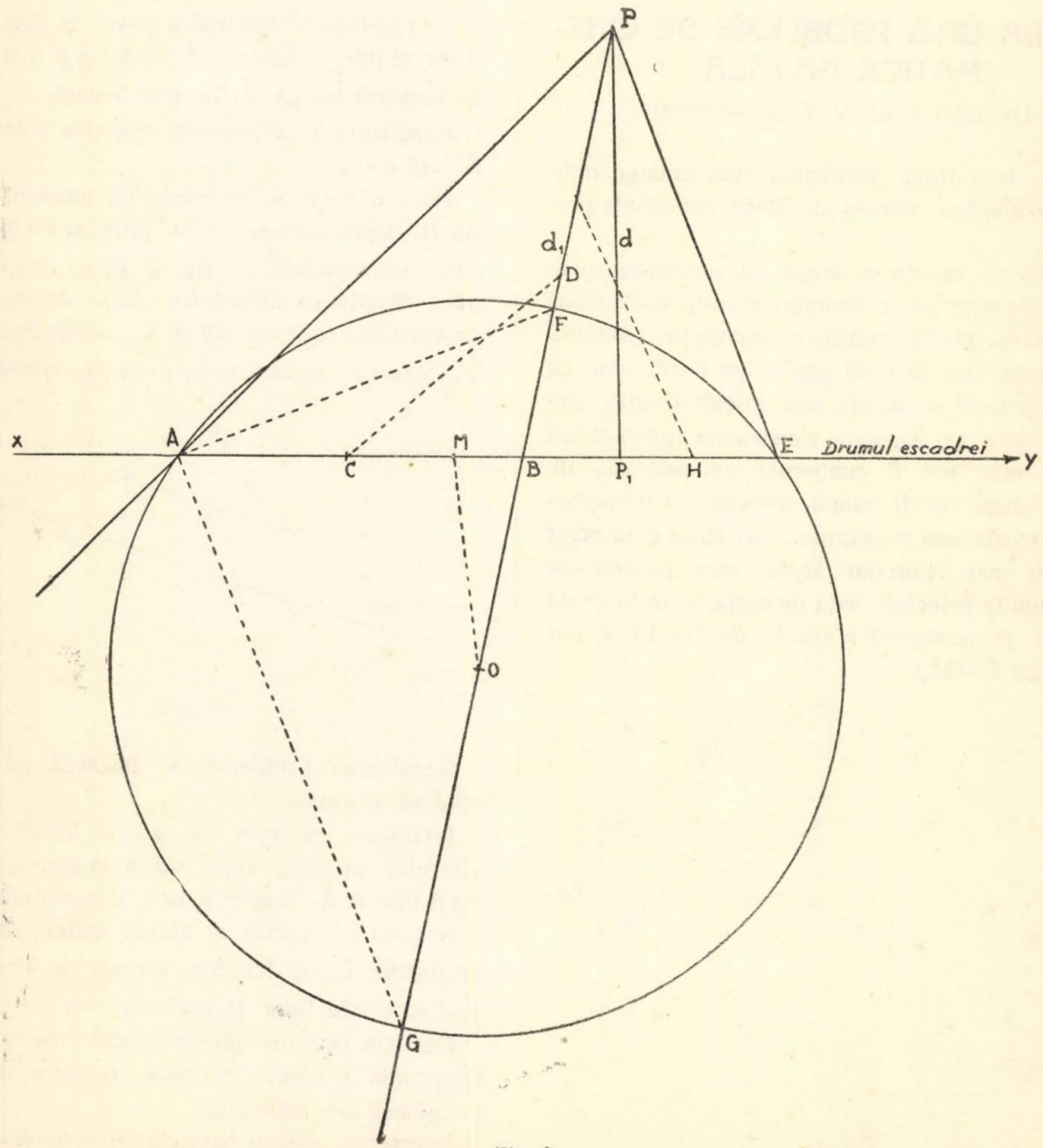


Fig. 3.

Pentru a găsi punctul de unde nava a plecat în recunoaştere, va trebui ca punctul P să dea goană punctului B, punctul B mergând în sens invers cu escadra. Pentru aceasta se ia $BC = \overline{V}_E$, iar din C

ca centru şi cu o viteză egală cu V_D, se taie dreapta B P. Din P ducem o paralelă la D C, care taie xy în A. A este punctul de unde nava a plecat în recunoaştere. O construcţie analoagă ne duce la aflarea punctului E, punct unde nava realiază escadra.

Vitezele fiind cunoscute, va trebui să determinăm punctul B, astfel ca distanţa A E să fie minimă ($AE = V_E \cdot T$).

Pentru determinarea acestei chestiuni, observăm că

$$\frac{AP}{AB} = \frac{V_D \cdot t}{V_E \cdot t} = \frac{V_D}{V_E} = \text{constant},$$

deci, conform unei teoreme cunoscute, locul lui A este pe un cerc a cărui centru se găseşte pe P B; iar punctele F şi G care divid armonic segmentul B P, unite, formează diametrul cercului.

Punctele F şi G sunt tocmai picioarele bisectoarelor unghiului B A P, conform unei alte teoreme, iar segmentele determinate de picioarele bisectoarelor, împart latura opusă în acelaş raport cu laturile A P şi A B;

$$\frac{FP}{FB} = \frac{AP}{AB} = \frac{V_D t}{V_E t} = \frac{V_D}{V_E}.$$

Scoatem valoarea segmentului F B;

$$\frac{FP + FB}{FB} = \frac{V_D + V_E}{V_E} = \frac{BP}{V_E} = \frac{d_1}{FB},$$

$$FB = \frac{d_1 V_E}{V_D + V_E}.$$

Analog deducem valoarea segmentului G B.

$$\frac{GB}{GP} = \frac{AB}{AP} = \frac{V_E \cdot t}{B_D \cdot t} = \frac{V_E}{V_D},$$

$$\frac{BG}{GP - GB} = \frac{V_E}{V_D - V_E} = \frac{GB}{d_1},$$

deci:

$$GB = \frac{d_1 V_E}{V_D - V_E}.$$

Atunci diametrul

$$GF = \frac{2 d_1 V_E V_D}{V_D^2 - V_E^2}, \qquad (GF = GB + BF),$$

iar raza R va fi egală cu jumătatea lui G F.

Fie O centrul cercului. Să calculăm distanţa A B, avem:

$$OB = R - FB = \frac{d_1 V_E V_D}{V_D^2 - V_E^2} = \frac{d_1 V_E}{V_D + V_E} =$$

$$\frac{d_1 V_E V_D - d_1 V_E (V_D - V_E)}{V_D^2 - V_E^2} = \frac{d_1 V_E^2}{V_D^2 - V_E^2},$$

iar distanţa lui O la dreapta xy este:

$$(R - FB) \sin OBA = \frac{d_1 V_E^2}{V_D^2 - V_E^2} \cdot \frac{d}{d_1}.$$

Deci distanţa centrului cercului (O) la dreapta xy, este constantă şi egală cu $\frac{d V_E^2}{V_D^2 - V_E^2} = \text{constant}$, când B variază pe xy.

Observăm că A E este o coardă într'un cerc cu raza variabilă $\frac{d_1 V_E V_D}{V_D^2 - V_E^2}$ (d_1 este funcţie de $z = BP_1$); iar distanţa dela acel cerc la dreapta xy este constantă. Deci A E va fi minim în acelaş timp cu raza cercului.

Minimum lui $R = \frac{d_1 V_E V_D}{V_D^2 - V_E^2}$ este atunci când $d_1 = d$.

Deci când nava se găseşte în P, escadra trebue să se găsească în P_1, ca timpul detaşării să fie minim.

In legătură cu această problemă, imi propun să rezolv următoarea chestiune. *Comandantul escadrei acordă navei ce pleacă în recunoaştere un timp* T, *Comandantul navei are latitudinea să-şi aleagă punctul de unde va pleca în recunoaştere.*

In fig. 1. observăm că $\overline{AM}^2 = R^2 - \overline{OM}^2$.

Dar

$$\overline{OM}^2 = \left[\frac{d V_E^2}{V_D^2 - V_E^2}\right]^2 \quad \text{şi} \quad R^2 = \left[\frac{d_1 V_E V_D}{V_D^2 - V_E^2}\right]^2,$$

deci

$$AM = \sqrt{\frac{d_1^2 V_E^2 V_D^2 - d^2 V_E^4}{(V_D^2 - V_E^2)}} =$$

$$\frac{V_E}{V_D^2 - V_E^2} \sqrt{d_1^2 V_D^2 - d^2 V_E^2}$$

$$AE = 2AM = \frac{2 V_E}{V_D^2 - V_E^2} \sqrt{d_1 V_D^2 - d_2 V_E^2} = V_E \cdot T,$$

T timpul acordat de comandantul escadrei; simplificând cu V_E, avem:

$$T = \frac{2}{V_D^2 - V_E^2} \sqrt{d_1^2 V_D^2 - d^2 V_E^2}$$

$$\sqrt{d_1^2 V_D^2 - d^2 V_E^2} = \frac{(V_D^2 - V_E^2)\,T}{2}$$

$$d_1^2 V_D^2 - d^2 V_E^2 = \frac{(V_D^2 - V_E^2)^2 T^2}{4}$$

$$d_1^2 V_D^2 = \frac{(V_D^2 - V_E^2)^2 T^2 + 4 d^2 V_E^2}{4},$$

deci:

$$d_1 = \sqrt{\frac{(V_D^2 - V_E^2)^2 T^2 + 4 d^2 V_E^2}{4 V_D^2}}.$$

Ca problema să fie posibilă, trebue ca d_1 dedus din formulă, să fie mai mare ca d.

In cazul când $d_1 > d$, vom avea două soluţii, căci cercul cu centrul în P şi cu raza d_1, va tăia xy în două puncte.

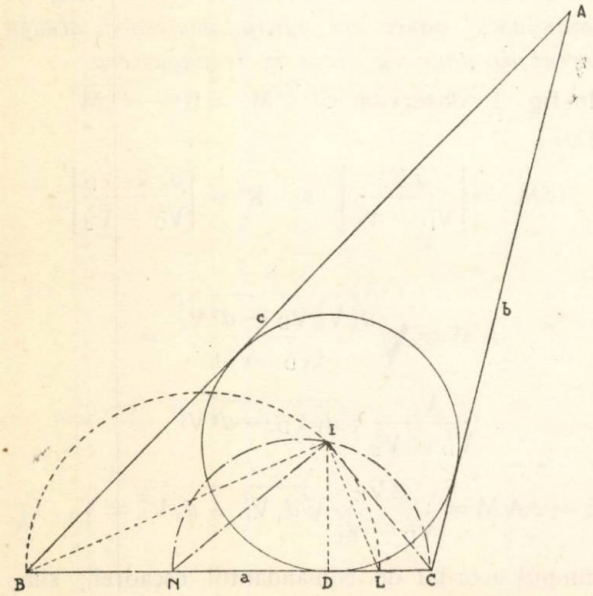
In cazul când $d_1 = d$, vom avea o soluţie.

In cazul când $d_1 < d$, nu vom avea nici o soluţie.

Odată cunoscut punctul B, se poate deduce uşor, punctul A de plecare şi punctul E de raliere.

NOTE MATEMATICE

3. — *Sur le triangle spécial* $b + c = 3a$.



1. Soient BI et CI les bissectrices des angles B et C. Elevons en I, centre du cercle inscrit, la perpendiculaire IL sur BI, et abaissons de I la perpendiculaire sur BC.

On a, d'après des théorèmes connus,

$$BD = p - b \qquad DL = \frac{\overline{ID}^2}{BD} = \frac{r^2}{p-b}$$

$$r^2 = \frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p},$$

donc

$$DL = \frac{(p-a)(p-c)}{p},$$

$$LC = p - c - DL = p - c - \frac{(p-a)(p-c)}{p} = \frac{a(p-c)}{p}$$

Or, si $b + c = 3a$, $2p = a + b + c = 4a$, $p = 2a$, $p - a = a$. Donc $DL = LC$.

On trouve aussi $BN = ND$, IN étant perpendiculaire à la bissectrice IC au centre du cercle inscrit.

Nous pouvons donc énoncer la propriété suivante:

Si dans un triangle on a la relation $b + c = 3a$, *les perpendiculaires élevées au centre du cercle inscrit sur les bissectrices des angles adjacents au côté a, passent respectivement par les milieux des segments formés sur ce côté par le point de contact du cercle inscrit.*

2. Nous avons, d'après ce qui précède,

$$DL = LC = \frac{p-c}{2} = a - \frac{c}{2}$$

$$BN = ND = \frac{p-b}{2} = a - \frac{b}{2}.$$

On en déduit:

$$BL = \frac{c}{2}, \qquad CN = \frac{b}{2}.$$

On a aussi la proposition suivante:

Si dans un triangle $b + c = 3a$, *le centre du cercle inscrit se trouve à l'intersection des deux cercles décrits sur* BL *et* CN *comme diamètres,*

$$BL = \frac{c}{2} \qquad \text{et} \qquad CN = \frac{b}{2}.$$

3. Calculons le segment NL.

$$NL = ND + DL = a - \frac{b}{2} + a - \frac{c}{2} =$$

$$2a - \frac{3a}{2} = \frac{a}{2}.$$

Pour le triangle spécial considéré, la distance des points d'intersection avec le côté a des perpendiculaires élevées au centre du cercle inscrit sur les bissectrices des angles adjacents au côté a, est égale à $\frac{a}{2}$.

A. GLODEN
(Luxenbourg)

4. — *Géométrie et Mécanique.* Soient A_1BC, B_1CA, C_1AB et A_2BC, B_2CA, C_2AB les triangles équilatéraux construits extérieurement et intérieurement à un triangle ABC, d'aire S; G le barycentre; θ l'angle de *Brocard.*

1. Une rotation de 60° autour du point A faisant coïncider les triangles AC_1C, AC_2C avec les triangles ABB_1, ABB_2, on a

$$(1)\quad AA_1 = BB_1 = CC_1 \quad \text{et} \quad AA_2 = BB_2 = CC_2.$$

Soit V_1 le point de rencontre des droites BB_1, CC_1. Le triangle AC_1C étant égal au triangle AB_1B, les distances du point A aux droites BB_1, CC_1 sont égales et font entre elles un angle de 60°; la demidroite V_1A_1 est donc la bissectrice intérieure de l'angle $B_1V_1C_1$ et celui-ci vaut 120°.[1]

2. Il résulte de ces remarques que deux forces représentées en grandeur et en direction par AA_1 et BV_1 déterminent une résultante V_1T_1, de direction V_1C et d'intensité égale à $AA_1 = BB_1$. Cette résultante V_1T_1 est donc directement opposée à une troisième force V_1T_2, de direction V_1C_1 représentée en grandeur par CC_1, passant par le point V_1.

Les trois forces $\overline{AA_1}$, $\overline{BB_1}$, $\overline{CC_1}$ *se réduisent donc à un couple;* de sorte que *les triangles* ABC, $A_1B_1C_1$ *ont même barycentre* G, *et réciproquement.*

Par analogie, les triangles ABC, $A_2B_2C_2$ ont aussi même barycentre G. On retrouve ainsi des propriétés connues établies d'une autre manière.

Remarques. On démontre aisément les égalités (1) par le calcul, et on trouve

$$\overline{AA_1}^2 = \overline{BB_1}^2 = \overline{CC_1}^2 = 2S\,.\,(\cot\theta + \sqrt{3})$$

$$\overline{AA_2}^2 = \overline{BB_2}^2 = \overline{CC_2}^2 = 2S\,.\,(\cot\theta - \sqrt{3});\ ^{2)}$$

d'où il résulte que

$$AA_1\,.\,AA_2 = BB_1\,.\,BB_2 = CC_1\,.\,CC_2 = 2S\sqrt{\cot^2\theta - 3}\,.$$

Dans le cas particulier où $\cot\theta = 2$[3], on a

$$AA_1\,.\,AA_2 = BB_1\,.\,BB_2 = CC_1\,.\,CC_2 = 2S.$$

Autrement dit, dans un triangle ABC, où $\cot\theta = 2$, *le produit des distances des sommets* A, B, C *aux sommets des triangles équilatéraux construits extérieurement et intérieurement sur les côtés opposés est égal au double de l'aire du triangle fondamental.*

V. THÉBAULT
(LE MANS, FRANCE)

5. — *Asupra ecuației pseudo-binoamă a d-lui Prof. V. Alaci.*

In articolul *„O clasă de ecuațiuni algebrice cu rădăcini trigonometrice"*, publicat în *„Știință și Progres"*, anul III, No. 10, d-l Prof. *V. Alaci* a construit ecuația ale cărei rădăcini sunt

$$(1)\quad x = a\cos^2\frac{k\pi}{n} + b\sin^2\frac{k\pi}{n} + c\sin\frac{2k\pi}{n},$$

$$(k = 0, 1, 2, \ldots, n-1),$$

a, b, c fiind numere algebrice oarecare. Ecuația este

$$(2)\quad \left[x - \alpha \mp \sqrt{(x-\alpha)^2 - \beta^2 - c^2}\right]^n - (\beta - ci)^n = 0,$$

unde:

$$(3)\qquad \alpha = \frac{a+b}{2}, \qquad \beta = \frac{a-b}{2}.$$

Ecuația (2) o vom numi *pseudo-binoamă,* deoarece, după cum se va vedea, se poate obține, printr'o transformare, din ecuația binoamă

$$(4)\qquad X^n - 1 = 0.$$

In cele ce urmează ne propunem să urmăm calea inversă aceleia urmată de d-l Prof. *V. Alaci* în articolul amintit; anume, dându-ni-se ecuatia (2), să-i găsim soluțiile.

[1]) Propriétés connues.

[2]) Cfr. *V. Thébault, Mathesis,* 1935 (supplément, p. 18).

[3]) Ce triangle spécial possède de très nombreuses propriétés que nous avons données dans divers Recueils. (V. T.)

In acest scop, vom face în ecuaţia binoamă (4), ale cărei rădăcini sunt cunoscute:

$$(5)\quad X=\cos\frac{2k\pi}{n}+i\sin\frac{2k\pi}{n},\ (k=0,1,2,\ldots,n-1),$$

substituţia

$$(6)\qquad X=\frac{x-\alpha\mp\sqrt{(x-\alpha)^2-\beta^2-c^2}}{\beta-ci},$$

α, β fiind date de relaţiile (3).

Introducând pe X din (5) în ecuaţia binoamă (4), obţinem

$$\left[\frac{x-\alpha\mp\sqrt{(x-\alpha)^2-\beta^2-c^2}}{\beta-ci}\right]^n-1=0,$$

adică, în definitiv, după ce ne scăpăm de numitor, tocmai ecuaţia (2) a d-lui *V. Alaci.* Rezultă că rădăcinile ecuaţiei (2) vor fi date de relaţia (6) în care X este dat de (5).

Avem succesiv

$$x-\alpha\mp\sqrt{(x-\alpha)^2-\beta^2-c^2}=(\beta-ci)X,$$

sau

$$\pm\sqrt{(x-\alpha)^2-\beta^2-c^2}=(x-\alpha)-(\beta-ci)X,$$

care printr'o ridicare la patrat ne dă

$$(x-\alpha)^2-\beta^2-c^2=$$

$$(x-\alpha)^2-2(\beta-ci)(x-\alpha)X+(\beta-ci)^2X^2.$$

De aci scoatem

$$2(\beta-ci)(x-\alpha)X=(\beta-ci)^2X^2+\beta^2+c^2,$$

sau, prin simplificare cu $\beta-ci$

$$2(x-\alpha)X=(\beta-ci)X^2+\beta+ci.$$

Deci

$$x-\alpha=\frac{(\beta-ci)X^2+\beta+ci}{2X},$$

$$(7)\qquad x=\alpha+\frac{1}{2}(\beta-ci)X+\frac{1}{2}(\beta+ci)\frac{1}{X}.$$

Astfel, substituţia (6) este echivalentă cu substituţia (7), care este liniară în X şi $\frac{1}{X}$.

Din (5) deducem

$$(8)\quad \frac{1}{X}=\frac{1}{\cos\frac{2k\pi}{n}+i\sin\frac{2k\pi}{n}}=\cos\frac{2k\pi}{n}-i\sin\frac{2k\pi}{n}$$

Introducând în (7) pe X şi $\frac{1}{X}$ prin valorile date de (5) şi (8), avem succesiv:

$$x=\alpha+\frac{1}{2}(\beta-ci)X+\frac{1}{2}(\beta+ci)\frac{1}{X}=$$

$$\alpha+\frac{1}{2}(\beta-ci)\left(\cos\frac{2k\pi}{n}+i\sin\frac{2k\pi}{n}\right)+$$

$$\frac{1}{2}(\beta+ci)\left(\cos\frac{2k\pi}{n}-i\sin\frac{2k\pi}{n}\right)=$$

$$\alpha+\beta\cos\frac{2k\pi}{n}+$$

$$\frac{1}{2}ci\left(\cos\frac{2k\pi}{n}-i\sin\frac{2k\pi}{n}-\cos\frac{2k\pi}{n}-i\sin\frac{2k\pi}{n}\right)$$

$$=\frac{a+b}{2}+\frac{a-b}{2}\cos\frac{2k\pi}{n}+c\sin\frac{2k\pi}{n}=$$

$$\frac{a}{2}\left(1+\cos\frac{2k\pi}{n}\right)+\frac{b}{2}\left(1-\cos\frac{2k\pi}{n}\right)+c\sin\frac{2k\pi}{n}.$$

Utilizând formulele cari ne dau arcele pe jumătate

$$2\cos^2y=1+\cos2y,\quad 2\sin^2y=1-\cos2y,$$

obţinem în definitiv

$$x=a\cos^2\frac{k\pi}{n}+b\sin^2\frac{k\pi}{n}+c\sin\frac{2k\pi}{n},$$

unde

$$k=0,1,2,\ldots,n-1,$$

cari sunt rădăcinile căutate, ale ecuaţiei (2).

N. O. ZAHARIA

BIBLIOGRAFIE

1. *Gazeta Matematică*, anul XLII, No. 7, Martie 1937. Recreaţii. Aritmetica lui *G. Obradovici*, de *Victor Marian.* Noţiuni de geometrie cinematică (urmare de la pag. 207), de *Eugen Vişa.* Articol despre triunghiul echilateral, de *Ernest Abason.* Regulamentul fondului bursei „profesor *Ion Ionescu*". Circulară adresată de Ministerul Educaţiei Naţionale tuturor şcoalelor secundare. Note matematice. Bibliografie. Cereri. Diverse. Probleme rezolvate Exerciţii. Probleme propuse.

2. *Boletin Matematico*, anul IX, No. 10, Decembrie 1936, Buenos-Aires. Discuţia teoremei fundamentale a deplăsărei unei figuri în planul său, de *B. I. Baidaff.* Note matematice.

3. *Ştiinţă şi Progres.* Revista ştiinţifică a liceelor Militare, anul III, No. 10, Martie 1937. Probleme referitoare la progresii, de *G. Iuga.* Unde a ajuns securitatea Franţei,

de *G. Janet*. Publicaţii noui, de *N. O. Z.* Probleme rezolvate şi propuse.

4. *Revista Cercuiui de Studii şi a Asociaţiei absolvenţilor Şcoalei Superioare P. T. T., Timişoara*, anul VI, No. 2, Februarie 1937 (litografiat). In afară de articole de specialitate are şi o pagină matematică.

5. *Buletinul Şedintelor*, anul I, No. 3. Sfârşit de an, de *V. Vâlcovici*. Matematica în anul 1936, de *Miron Nicolescu*. Fizica în anul 1936, de *Eugen Bădărău*. Chimia în 1936, de *D. Buttescu*. Ştiinţele Naturale în anul 1936, de *Tr. Săvulescu*. Situaţia financiară a secţiunilor. Activitatea secţiunilor de matematici, fizice, chimie şi naturale.

6. *Letterio Toscano*. Sui coefficienti della tangente e sui numeri di *Bernoulli*. (Estratto dal Bulletino dell' Unione Matematica Italiana, anno XV, No. 1).

7. *Letterio Toscano*. Su gli operatori lineari associati. (Atti del Reale Instituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti, 1935—1936).

8. *Letterio Toscano*. Succesioni ricorrenti e polinomi di *Bernoulli* e di *Eulero*.

9. *Letterio Toscano*. Operatori permutabili di secondo ordine. (Estratto dal Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, 1936.)

10. *Letterio Toscano*. Sulle potenze di una matrice del seconde ordine. (Estratto dal Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, 1936.)

11. *N. Abramesco*. Sur le développement d'une fonction suivant les puissances croissantes d'un polynome et applications à la détermination des courbes de convergence de certaines séries de polynomes. (Extras din „*Mathematica*", vol. IX, 1935.)

12 *N. Abramesco*. Sur l'étude de la forme d'une courbe ou d'une surface dans le voisinage de l'un de ses points et une nouvelle interprétation de la cubique donnant les tangentes de *Darboux* et *Segre*. (Extras din „*Mathematica*", vol XII, 1936)

13. *N. Abramesco*. Sullo studio di una superficie nell'intorno di un suo punto e una nuova interpretazione della cubica che dà le tangenti di *Darboux* e *Segre*. (Estratto dal Rendiconti della R. Accademia Nazionale dei Lincei, Vol. XXIV, 1936.

14. *P. Sergescu*. La Vie Contemporaine des Mathématiques. (Extrait de la Revue de l'Université de Bruxelle, 1937.)

15. *Eugen Vişa*. Noţiuni de Geometrie Cinematică. (Extras din „*Gazeta Matematică*".)

16. *Ioan Suhov*. Istoricul Geodeziei. (Extras din Revista „*Cadastru*").

17. *Constantin D. Buşilă*. Concentrarea învăţământului tecnic superior. (Extras din „*Buletinul Societăţii Politechnice din România*, 1937.)

18. *T. Angheluţă*, în colaborare cu, *Tib. Popoviciu* şi *Gh. Călugăreanu*. Exerciţii şi Probleme de Analiză, Teoria Funcţiilor şi Mecanică Raţională, cu o prefaţă de D-l *Paul Montel*. Acest interesant volum de 254 pag. ce conţine 472 exerciţii şi probleme, nu trebuie să lipsească nici unui student de la Facultăţile de Ştiinte şi Şcolile Politechnice, cărora le-o recomandăm călduros. Editura Uninersităţii din Cluj.

19. *Paul Montel*. Lecţiuni despre Funcţiunile Aproape-Periodice, redactate de *Tiberiu Popoviciu*. Acest volum conţine 6 lecţiuni predate la Universitatea din Cluj de d-l Prof. *Montel*, în cursul anului 1935.

20. *Ion Dumitriu*. Culegere de Probleme de Geometria Analitică. Acest volum se adresează elevilor de cl. VIII a secţiei ştiintifice, precum şi studenţilor din anul preparator de la şcolile Politechnice, Militare şi de la Universitate, cărora le-o recomandăm cu stăruinţă. (Craiova)

PROBLEME REZOLVATE

929. — *Fie un trapez* A B C D, E *intersecţia diagonalelor* A C *şi* A D. *Prelungim pe* A B *cu distanţa* B F *egală cu* C D, *iar pe* C D *cu distanţa* D G *egală cu* A B. *Dreapta* G F *intersectează pe* B D *în* H. *In ce caz segmentele* D H, H E, E B *sunt egale ?*

N. N. MIHAILEANU

Problema comportă examinarea a două cazuri de figură, după cum laturile paralele sunt A B, C D sau A D, B C.

Cazul I. Laturile paralele sunt A B, C D. (fig. 1).

Asemănarea triunghiurilor A B E, C D E de o parte şi a triunghiurilor D H G, B H F de altă parte, dau

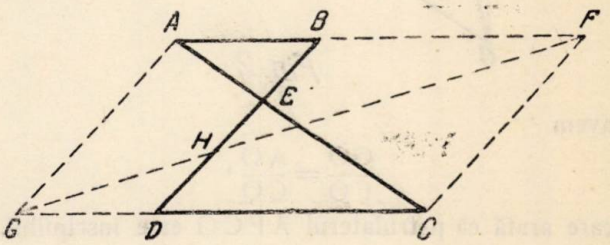


Fig. 1.

$$(1) \qquad \frac{EB}{ED} = \frac{AB}{DC}$$

$$(2) \qquad \frac{HD}{HB} = \frac{DG}{BF} = \frac{AB}{DC}.$$

Pentru ca

$$(3) \qquad DH = HE = EB,$$

se vede din (1) şi (2) că trebue să avem

$$(4) \qquad CD = 2AB.$$

Reciproc, din (4) şi (1), (2) se deduce (3).

Cazul II. Laturile paralele sunt A D, B C (fig. 2).

Fie O întâlnirea dreptelor A B, D C. Triunghiurile B O D, B O C tăiate de transversale F G H şi A E C, dau

$$(5) \qquad \frac{HD}{HB} \cdot \frac{FB}{FO} \cdot \frac{GO}{GD} = 1$$

$$(6) \qquad \frac{EB}{ED} \cdot \frac{CD}{CO} \cdot \frac{AO}{AB} = 1,$$

care în cazul (3) dau

$$\frac{FB}{FO}\cdot\frac{GO}{GD}=\frac{CD}{CO}\cdot\frac{AO}{AB}$$

şi ţinând seamă de

$$FB=CD \quad \text{şi} \quad GD=AB,$$

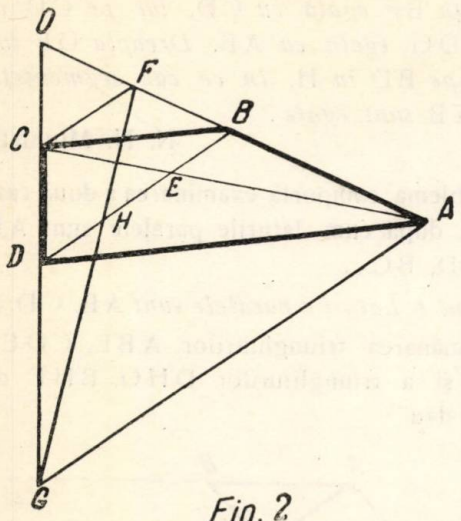


Fig. 2

avem

$$\frac{GO}{FO}=\frac{AO}{CO},$$

care arată că patrulaterul AFCG este insciptibil.

Cum

$$AF=CG$$

prin ipoteză, urmează că acest patrulater este un trapez isoscel şi deci

$$OC=OF$$

Observăm că de oarece

$$\frac{CB}{AD}=\frac{EB}{ED}=\frac{HD}{HB}=\frac{1}{2}$$

rezultă

$$AD=2.CB,$$

adică tot rezultatul de la cazul I. Reciproc, plecând dela această relaţie se găseşte (3).

Au examinat cazul I. d-nii: *Ghişoiu I. P.*, *Goruneanu I. M.*, *Grossu I. A.*, *Ionescu P. H. Ivănescu C.*, *Marinescu Ir.*, *Mercuţă E.*, *Pop L.* şi *Russu D. C.*

D-l *Lupescu Gh. C.* a examinat cazul II.

1455. — *Să se construiască unghiul* α *astfel ca să avem*

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{B-C}{2}},$$

ştiind că A, B, C *sunt unghiurile unui triunghiu.*

V. ALACI

Fie a, b, c laturile unuia din triunghiurile cu unghiurile A, B, C.

Avem relaţiunea cunoscută,

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C},$$

care se mai poate scri succesiv:

$$\frac{a}{2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}}=\frac{b+c}{\sin B+\sin C}=$$

$$\frac{b+c}{2\sin\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2}}=\frac{b+c}{2\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B-C}{2}}.$$

De aci deducem după simplificare:

$$\frac{a}{\sin\frac{A}{2}}=\frac{b+c}{\cos\frac{B-C}{2}},$$

sau

$$(1)\qquad \frac{\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{B-C}{2}}=\frac{a}{b+c}.$$

Relaţia din enunţ devine în virtutea relaţiei (1):

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{a}{b+c}.$$

Această relaţie ne spune că putem construi unghiul α, construind un triunghiu dreptunghiu, având catetele a şi $b+c$, unde a, b, c le avem din unul din triunghiurile ce are unghiurile A, B, C. Unghiul α este unghiul triunghiului dreptunghic ce am spus că-l construim, care se opune catetei a.

Soluţii date de d-ra: *Savin Maria* şi de d-nii: *Amărăşteanu F. Marcel* (bacalaureat, Craiova), *Andrunachievici Vladimir* (lic. Chişinău), *Bal Lascu* (student, Cluj), *Florescu L. Victor* (lic. Milit, N. Filipescu), *Matei D. D-tru* (lic. Internat, Iaşi), *Negulescu D. Ştefan* (lic. Milit, N. Filipescu). *Negrea A. Leonte-Mircea* (Brăila), *Popoviciu Gavril* şi *Zagaican Ilie* (Conductor de L. P.)

1458. — *Dacă numerele* $m+n$ *şi* $m-n$ *au acelaşi număr de cifre, numărul*

$$[(m+n)0(m-n)]^{2p+1}+[(m-n)0(m+n)]^{2p+1}$$

este divizibil prin $2m$.

G. G. CONSTANTINESCU

Numărul,

$$[(m+n)0(m-n)]^{2p+1}+[(m-n)0(m+n)]^{2p+1}$$

este divizibil prin

$$A=(m+n)0(m-n)+(m-n)0(m+n),$$

de oarece ce o expresie de forma $x^{2p+1}+y^{2p+1}$ este divizibilă prin $x+y$.

Dar numărul A se mai poate scri, ţinând seamă că $m+n$ şi $m-n$ au acelaşi număr de cifre, k de exemplu:

$$A=(m+n)10^{k+1}+m-n+(m-n)10^{k+1}+$$

$$m+n=10^{k+1}\times 2m+2m=2m(10^{k+1}+1).$$

$2m$ este astfel un divizor a lui A, deci şi a numărului din enunţ.

Soluţii date de d-nii: *Amărăşteanu F. Marcel* (bacalaureat, Craiova), *Cazanacli V. Petre* (Chişinău), *Florescu L. Victor*, *Gloden A.* (Luxembourg) şi *Matei D-tru* (lic. Internat, Iaşi).

1465. — *Să se găsească fracţia ordinară care dă naştere fracţiunei periodice:*

$$2{,}3456785678\ldots$$

M. AMARASTEANU

Fie

$$x=2{,}3456785678\ldots$$

Putem scri:

$$1000000\,x=2345678{,}5678\ldots$$

$$100\,x=234{,}5678\ldots$$

Scăzând relaţia 2-a din prima, avem:

$$999900\,x=2345444.$$

De aci deducem:

$$x=\frac{2345444}{999900}=\frac{587361}{249975}.$$

Fracţia ordinară cerută este astfel:

$$\frac{586361}{249975}.$$

Soluţii date de d-ra: *Comloşan Cornelia* (studentă, Cluj) şi de d-nii: *Andrunachievici Vl.* (bacalaureat, Chişinău), *Babeţiu Corneliu* (lic. Loga, Timişoara), *Bal Lascu* (student), *Bărbulescu C. Tanase* (Şc. Of. de Artilerie), *Berinde L. T. Beloiu B. D-tru* (lic. Lugoj), *Cazanacli V. P.* (Chişinău), *Davidovici Paul* (lic. Vaslui), *Dăscălescu Hr.* (Focşani), *Kornis Ernest* (lic. Loga, Timişoara), *Jidanu I. C-tin* (lic. Beiuş), *Lupescu Gh. Corneliu* (Şc. Of. de Artilerie), *Moisovici M. Ştefan* (bacalaureat), *Murgu V. Marţian* (lic. Beiuş), *Negrea A. Mircea* (Brăila), *Pasere Emil* (lic. Milit., Tg-Mureş), *Petrescu-Craioviţa Anastasie* (Craiova), *Pompeiu Marica*, *Popescu Zorica Alexandru*, *Popovici I. Gavril* (Şc. Polit., Bucureşti), *Ripianu Andreiu*, *Rosemberg I.* (lic. Roman), *Segal Zigu* (lic. Vaslui), *Stamate I. Ionel*, *Ştefănescu Costin*, *Tilică C. Ştefan*, *Tărălungă Gh. Dimitrie* (lic. Milit., Tg-Mureş), *Viciu A. Aurel* (Tg-Mureş), *Vlad I. C. M.* (Sub-Lt) şi *Zagaican Ilie* (Conductor de L. P.)

1470. — *Notaţiile fiind cele obicinuite într'un triunghiu, se cere să se rezolve ecuaţia:*

$$4spx^2-(4s^2+pabc)x+abcs=0.$$

MIHAIL M. CHIRITA

Ecuaţia dată se mai poate scri:

$$(1)\qquad x^2-\left(\frac{s}{p}+\frac{abc}{4s}\right)x+\frac{abc}{4p}=0.$$

Dar fiind cunoscute relaţiile

$$\frac{s}{p}=r,\qquad \frac{abc}{4s}=R,\qquad \frac{abc}{4p}=Rr,$$

ecuaţia (1) devine:

$$x^2-(r+R)x+Rr=0.$$

Rezolvind această ecuaţie obţinem:

$$x=\frac{r+R\pm\sqrt{(r+R)^2-4Rr}}{2}=$$

$$\frac{r+R\pm(r-R)}{2},$$

deci:

$$x_1=r,\qquad x_2=R.$$

Rădăcinele ecuaţiei date sunt astfel, raza cercului înscris şi raza cercului circumscris a triunghiului cu elemente date.

Soluţii date de d-rile: *Comloşan Cornelia* (studentă, Cluj), *Savin Maria* şi de d-nii: *Amărăşteanu F. Marcel* (bacalaureat, Craiova), *Andrunachievici Vladimir* (bacalaureat, Chişinău), *Andrievici N.*, *Apostol R.* (lic. Milit., N. Filipescu), *Bălăuţă Gh.* (lic. Milit., Cernăuţi), *Bărbulescu C. Tanase* (Şc. Of. de Artilerie), *Begu I. Ştefan*, *Berinde L. Titus* (lic. Lugoj), *Breţeanu C-tin* (lic Milit., Cernăuţi), *Cazanacli V. Petre* (Chişinău), *Cernat Camil*, *Cioc I. D-tru* (lic. Milit., Craiova), *Constantinescu C. Vasile* (lic. Milit., Tg-Mures), *Cotescu I. C-tin* (lic. Milit, Iaşi), *Davidovici Paul* (lic. Vaslui), *Dăscălescu Hristache* (Focşani), *Deciulescu D. Gheorghe*, *Dombrovschi P. Igor* (lic. Milit., Cernăuţi), *Florescu Victor* (lic. Milit., N. Filipescu), *Herman Al. Victor* (student, Cluj), *Ionescu C. Ştefan* (lic. Milit., N. Filipescu), *Jidanu I. C-tin*, *Lăzărescu Stelian* (lic. Milit., N. Filipescu), *Lupescu Gh. Corneliu* (Şc. Of de Artilerie), *Matei D-tru* (lic. Internat, Iaşi), *Milu I. Nicolae* (bacalaureat), *Murgu V. Marţian* (lic. Beiuş), *Negrea A. Mircea* (Brăila), *Negulescu D. Ştefan* (lic. Milit, N. Filipescu), *Olaru Eugen* (Abrud), *Pasere Emil* (lic. Milit., Tg-Mureş), *Pădureţ Vasile* (lic. Milit., Chişinău), *Petrescu-Craioviţa Anastasie* (Craiova), *Petrescu C. Benone*, *Poalelungi Gh. Valeriu* (lic. Milit., Cernăuţi), *Pompeiu Marica*, *Popescu Zorica Alexandru*, *Popovici C. Alexandru* (lic.

Milit., Cernăuți), *Popoviciu I. Gavril* (bacalaureat), *Ripianu Andreiu*, *Rosemberg I.* (lic. Roman), *Șerbănescu Ștefan* (lic. Milit, Cernăuți), *Stamate I. Ionel*, *Stefănescu Aurel* (lic. Milit., Cernăuți), *Stefănescu Costin* (lic. Milit, N. Filipescu), *Stefănescu D. Nicolae* (lic. Milit, N. Filipescu), *Teodorescu N. Dorin*, *Teodorescu V. Vasile* (lic. Milit, Cernăuți), *Tica P. Marin-Gall* (Sub-Lt), *Tilică C. Ștefan Țarălungă Dimitrie* (lic. Milit., Tg-Mureș), *Viciu A. Aurel* (Tg-Mureș), *Vlad I. C. M.* (Sub-Lt) și *Zagaican Ilie* (Conductor de L. P)

1500. — *Să se discute sistemul:*

$$\begin{cases} ax+y+z=p \\ ax-y+az=q \\ x+y+az=p. \end{cases}$$

EUGEN VISA

Determinantul sistemului

$$D=\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ a & -1 & a \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix}=-3a^3+2a+1=-(3a+1)(a-1),$$

se anulează pentru $a=-\frac{1}{3}$ și $a=1$.

Vom discuta acum sistemul dat în următoarele cazuri:

1. Dacă $a\neq-\frac{1}{3}$ și de 1, atunci $D\neq 0$, iar sistemul este compatibil și bine determinat.

Să aflăm sistemul de soluții. Adunăm ecuația 2-a, cu prima, apoi cu a 3-a ecuație din sistemul dat și avem:

$$(1)\qquad \begin{cases} 2ax+(a+1)z=p+q \\ (a+1)x+2az=p+q. \end{cases}$$

Prin scădere obținem:

$$(a-1)x-(a-1)z=0,$$

deci:

$$x=z.$$

Atunci sistemul (1) ne dă:

$$x=z=\frac{p+q}{3a+1},$$

valori care introdu-se în prima din ecuațiile sistemului dat, ne dă:

$$y=\frac{2ap-(a+1)q}{3a+1}.$$

Sistemul dat admite astfel în acest caz, sistemul de soluții

$$\begin{cases} x=z=\dfrac{p+q}{3a+1} \\ y=\dfrac{2ap-(a+1)q}{3a+1}. \end{cases}$$

2. Dacă $a=-\frac{1}{3}$, atunci $D=0$. In acest caz sistemul dat se poate scri:

$$(2)\qquad \begin{cases} x-3y-3z=-3p \\ x+3y+z=-3q \\ 3x+3y-z=3p. \end{cases}$$

Determinantul minor

$$S=\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}=6$$

fiind diferit de zero, este determinant principal.

Determinantul caracteristic corespunzător ecuației a 3-a din (2) este:

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 & -3p \\ 1 & 3 & 3q \\ 3 & 3 & 3p \end{vmatrix}=36(p+q).$$

Deosebim două cazuri:

1°. Dacă $p+q=0$, sistemul (2) este compatibil, dar nedeterminat. Din primele două ecuații din (2), obținem în acest caz:

$$\begin{cases} x=z \\ y=-\dfrac{2z}{3}+p. \end{cases}$$

2°. Dacă $p+q\neq 0$, sistemul (2) este incompatibil

3. Dacă $a=1$, atunci $D=0$. Sistemul dat în acest caz devine:

$$(3)\qquad \begin{cases} x+y+z=p \\ x-y+z=q \\ x+y+z=p. \end{cases}$$

Determinantul minor

$$\delta_1=\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}=-2,$$

fiind diferit de zero, este determinant principal.

Determinantul caracteristic corespunzător ecuației a 3-a din (3), este:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & p \\ 1 & -1 & q \\ 1 & 1 & p \end{vmatrix}\equiv 0.$$

Sistemul (3) este astfel compatibil, dar nedeterminat.

Din primele două ecuaţii din (3) obţinem:

$$\begin{cases} x = -z + \dfrac{p+q}{2} \\ y = \dfrac{p-q}{2}. \end{cases}$$

Soluţii date de d nii: *Amărăşteanu F. Marcel* (bacalaureat, Craiova), *Andrunachievici Vladimir* (bacalaureat, Chişinău), *Cotescu I. C-tin* (lic. Milit., Iaşi), *Cracia Georges* (lic. Milit, N. Filipescu), *Lupescu Gh. Corneliu* (Şc. of. de Artilerie), *Matei D. D-tru* (lic. Internat, Iaşi), *Popoviciu I. Gavril*, *Tilică C. Ştefan*, şi *Vlad C. I. Mihai* (Sub-Lt).

1508. — *Să se rezolve ecuaţia:*

$$(a - x^2)^2 = a - x.$$

ION C SCHILERU

Desvoltând calculele, ecuaţia dată se mai poate scri:

$$x^4 - 2ax^2 + x + a(a-1) = 0.$$

Această ecuaţie, descompusă în factori, devine:

$$(x^2 + x - a)\,[x^2 - x - (a-1)] = 0$$

şi este echivalentă cu următoarele:

$$x^2 + x - a = 0, \text{ deci: } x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+4a}}{2},$$

şi:

$$x^2 - x - a + 1 = 0, \text{ deci: } x_{3,4} = \frac{1 \pm \sqrt{4a-3}}{2}.$$

Ecuaţia dată admite astfel rădăcinele găsite x_1, x_2, x_3, x_4.

Soluţie dată de d-nii: *Negrea A. Mircea* (Brăila) şi *Tilica C. Ştefan.*

1510. — *Ecuaţia,* $x^3 + px + q = 0$, *admiţând ca rădăcini pe* tg a, tg b, tg c, *să se formeze ecuaţia algebrică cu rădăcinele,* sin 2 a, sin 2 b, sin 2 c.

S-LT. IOAN C. SAVIN

Dacă însemnăm,

$$\operatorname{tg} a = \alpha, \ \operatorname{tg} b = \beta, \ \operatorname{tg} c = \gamma$$

şi scriem relaţiile dintre rădăcinele şi coeficienţii ecuaţiei date, avem:

$$(1) \qquad \Sigma\alpha = 0, \ \Sigma\alpha\beta = p, \ \alpha\beta\gamma = -q.$$

Să formăm acum ecuaţia cu rădăcinele sin 2 a, sin 2 b, sin 2 c.

Această ecuaţie este de forma:

$$(2) \qquad x^3 + Ax^2 + Bx + C = 0,$$

unde:

$$A = -\Sigma \sin 2a, \quad B = \Sigma \sin 2a \sin 2b$$

$$C = -\sin 2a \sin 2b \sin 2c.$$

Cum,

$$\sin 2a = \frac{2\operatorname{tg} a}{1+\operatorname{tg}^2 a}, \ \sin 2b = \frac{2\operatorname{tg} b}{1+\operatorname{tg}^2 b},$$

$$\sin 2c = \frac{2\operatorname{tg} c}{1+\operatorname{tg}^2 c},$$

rezultă:

$$A = -2\sum \frac{\alpha}{1+\alpha^2}, \quad B = 4\sum \frac{\alpha\beta}{(1+\alpha^2)(1+\beta^2)},$$

$$C = -\frac{8\alpha\beta\gamma}{(1+\alpha^2)(1+\beta^2)(1+\gamma^2)}.$$

Rămâne să calculăm coeficienţii A, B, C, avem:

$$A = -2\frac{\Sigma\alpha(1+\beta^2)(1+\gamma^2)}{(1+\alpha^2)(1+\beta^2)(1+\gamma^2)}$$

$$(3) \qquad = -2\frac{\Sigma(\alpha+\alpha\beta^2+\alpha\gamma^2+\alpha\beta^2\gamma^2)}{1+\Sigma\alpha^2\beta^2+\Sigma\alpha^2+\alpha^2\beta^2\gamma^2} =$$

$$-2\frac{\Sigma\alpha+\Sigma\alpha[(\beta+\gamma)^2-2\beta\gamma]+\alpha\beta\gamma\Sigma\beta\gamma}{1+(\Sigma\alpha\beta)^2-2\alpha\beta\gamma\Sigma\alpha+(\Sigma\alpha)^2-2\Sigma\alpha\beta+\alpha^2\beta^2\beta^2}.$$

Având în vedere relaţiile (1) şi observând că $\beta+\gamma = -\alpha$, expresia (3) se mai poate scri:

$$A = -2\frac{\Sigma\alpha^3 - 6\alpha\beta\gamma - pq}{1+p^2-2p+q^2}$$

$$(4) \qquad = -2\frac{(\Sigma\alpha)^3 - 3(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha) + 6q - pq}{(1-p)^2+q^2}$$

$$= -2\frac{3\alpha\beta\gamma + 6q - pq}{(1-p)^2+q^2} = \frac{2q(p-3)}{(1-p)^2+q^2}.$$

Trecem la calculul lui B şi C. Avem ţinând seamă de relaţiile (1) şi de unele rezultate din (4):

$$(5) \quad B = 4\sum\frac{\alpha\beta}{(1+\alpha^2)(1+\beta^2)} = 4\frac{\Sigma\alpha\beta(1+\gamma^2)}{(1+\alpha^2)(1+\beta^2)(1+\gamma^2)}$$

$$= 4\frac{\Sigma\alpha\beta+\alpha\beta\gamma\Sigma\alpha}{(1-p)^2+q^2} = \frac{4p}{(1-p)^2+q^2},$$

$$(6) \quad C = \frac{-8\alpha\beta\gamma}{(1+\alpha^2)(1+\beta^2)(1+\gamma^2)} = \frac{8q}{(1-p)^2+q^2}.$$

Inlocuind în ecuaţia (2) valorile găsite pentru A, B, C în relaţiile (4), (5), (6), obţinem după ce aducem ecuaţia la formă întreagă.

$$[(1-p)^2+q^2]x^3 + 2q(p-3)x^2 + 4px + 8q = 0.$$

Aceasta este ecuaţia cerută prin enunţ.

Soluţii date de d-nii: *Amărăşteanu F. Marcel* (bacalaureat, Craiova), *Apostol Radu* (lic. Militar, N. Filipescu), *Berinde L. Titus*, *Jidanu C. C-tin*, *Lupescu Gh. Corneliu* (Şc. Of· de Artilerie), *Negrea A. Leonte- Mircea* (Brăila), *Petrescu-Craioviţa Anastasie* (Craiova), *Rădulescu Gh. Octavian*, *Ripianu Andreiu*, *Segal Zigu* (lic Vaslui) şi *Tilica C. Ştefan*.

Observare. D-l *Matei D-tru*, a folosit relaţia,

$$\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b + \operatorname{tg} c = \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b \operatorname{tg} c,$$

care nu-i adevărată de cât, dacă $a + b + c = 180^0$, ceia-ce nu a fost dat prin enunţ, astfel că soluţia d-sale este greşită.

PROBLEME PROPUSE

1570. — Să se găsească un patrat perfect de patru cifre, astfel că dacă se schimbă cele două cifre din dreapta, între ele, numărul obţinut este un cub.

V. THÉBAULT

1571. — Să se găsească un patrat perfect de şapte cifre de forma $a\,b\,b\,a\,c\,c\,c$.

G L GH. BUICLIU

1572. — Vârsta mea este de şapte ori mai mare ca a unui nepot. Peste câţi ani, voi fi de cinci ori, de patru ori şi de trei ori mai mare, ştiind că suma diferenţelor de vârstă este egală cu 14? Care sunt vârstele actuale?

SUB-LT. MARIN P. TICA-GALL

1573. — Să se rezolve sistemul:

$$\begin{cases} x^2(1-y^2)+y(y+2x)=a \\ x^2y+xy^2=b \end{cases}$$

MARCEL F. AMARASTEANU

1574. — Fie ABC un triunghiu oarecare A_1 şi B_1 mijloacele laturilor BC şi AC. Unind A cu A_1 şi A_1 cu B_1 se formează un triunghiu AA_1B_1. Să se arate că aria triunghiului ABC este de patru ori aria triunghiului AA_1B_1.

SUB-LT M. C I. VLAD

1575. — 1°. Se dă triunghiul ABC înscris în cercul O şi fie A_1 intersecţia dreptei BC cu tangenta în A la cerc. Să se arate că:

$$\frac{A_1C}{A_1B} = \frac{\overline{AC}^2}{\overline{AB}^2}.$$

2°. Insemnând cu A_1, B_1, C_1 intersecţiile laturilor BC, CA, AB respectiv cu tangentele în A,B,C la cerc, să se arate că punctele A_1, B_1, C_1 sunt colineare.

3°. Fie A_2, B_2, C_2 conjugatele armonice ale punctelor A_1, B_1, C_1 în raport cu BC, CA, AB; Să se arate că dreptele AA_2, BB_2, CC_2 sunt colineare.

4°. Să se probeze că AA_2, BB_2, CC_2 sunt simedianele triunghiului ABC (isogonalele medianelor, de ex., AA_2 şi mediana AA' sunt simetrice în raport cu bisectoarea interioară a unghiului A) şi că trec prin vârfurile triunghiului format de tangentele în A, B, C, la cercul O.

N. ABRAMESCU

1576. — Ştiind că A, B, C sunt unghiurile unui triunghiu, se cere să se determine relaţia între α, β, γ, care să asigure compatibilitatea sistemului:

$$\begin{cases} \dfrac{\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}} = \alpha \\ \dfrac{\sin\frac{B}{2}}{\cos\frac{C}{2}\cos\frac{A}{2}} = \beta \\ \dfrac{\sin\frac{C}{2}}{\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}} = \gamma \end{cases}$$

In urmă, să se rezolve sistemul în cazul particular:

$$\alpha = 2\beta = \frac{4}{3+\sqrt{3}}, \qquad \gamma = \frac{2\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}}.$$

V. ALACI

1577. — Să se rezolve un triunghiu dreptunghic, cunoscându-se ipotenuza sa şi ştiind că dacă se împart laturile în acelaşi raport dat şi în acelaşi sens, triunghiul ale cărui vârfuri sunt punctele de diviziune, este de asemenea dreptunghic. Discuţie.

ION C. SCHILERU-DILI

ERATA. — La pag. 1, rândul 4 de jos din coloana 1 începe cu *technic al armatei*, în loc de *al armatei*.

Manuscrise primite de la corespondenții noștrii până la 10 a lunei curente și anume: Articole (A), Note (N), probleme propuse (P) și probleme rezolvate indicate prin numărul lor de ordine.

Anastasiu M. Mihail (1313, 1513, 1521); *Andrievici N.* (1517, 1524); *Beloiu B. D-tru* (1540, 1549, 1551); *Buznea D. Dinu* (1540); *Cazanacli V. Petre* (1529, 1533, 1535, 1537, 1539, 1540, 1541, 1546, 1552); *Comloșan Cornelia* (1549, 1562, 1568, 1569); *Constantinescu C. Vasile* (1549), *Czirjak Vasile* (1559); *Damsker Dorel* (P.); *Djebcu Leonida* (P., 1560, 1562); *Gloden A.* (N., P.); *Jidanu I. C.* (1554); *Petrescu C. Benone* (1540); *Segal Joe* (P., 1540 1546, 1556); *Segal Zigu* (P, 1516, 1519, 1523, 1529, 1546, 1550, 1555, 1556, 1562, 1567, 1569); *Tica P. Marin* (1550, 1556, 1562, 1567, 1569); *Tilica C. Ștefan* (P., 1527, 1528, 1529, 1536, 1543, 1555, 1562, 1568); *Vlad I. C. Mihai* (1549, 1562, 1567, 1568, 1569); *Zamfirescu Gh. I.* (P).

INFORMAȚIUNI

La Redacțiunea „Revistei Matematice din Timișoara" se primesc abonamente pentru:

BOLETIN MATEMATICO

ANUL AL X-LEA

care a început în Martie 1937.

Costul *special* a unui abonament este de 200 lei.

Această Revistă se publică în Buenos-Aires, Republica Argentina.

Pentru anul al X-lea care începe în Martie 1937, s'au primit până acum la Redacția „R. M. T." următoarele abonamente:

1. Locotenent *Costăchescu Constantin,* Distrugătorul *„Regina Maria",* Constanța.
2. Profesor *I. Nemet,* Casa învățătorilor, str. Remus, Timișoara.

Răspundem pe această cale, la toți acei corespondenți, care se plâng că anumite probleme nu le-au fost considerate, că aceasta se datorește sau faptului că acele soluțiuni au sosit întârziate, sau au fost greșite, sau n'au sosit de loc.

Evident că astfel de probleme nu pot fi luate, în seamă.

Legându-se colecția R. M. T., anul XV, în volum și rămânând numere răzlețe care nu au putut fi legate, putem trimete corespondenților noștri numere care eventual le lipsesc din colecție în schimbul sumei de 10 lei. Doritorii se vor adresa administrației revistei, trimițând suma prin mandat poștal.

SPHINX

Revue mensuelle des questions récréatives

FONDÉE EN 1931

REVUE UNIQUE DANS SON GENRE
dans le monde entier

ABONNEMENTS:
1 an: Belgique, **30 fr.** France, **25** fr.
Etranger, 7 **belgas.**

Administration:
SPHINX, Bruxelles 75, Rue Philippe Baucq

Toți cei ce ne trimet articole, note, probleme propuse sau rezolvate, pentru a fi luate în considerație, sunt obligați a fi abonați la Revista Matematică din Timișoara.

Anunțăm că nu vom mai lua în considerare problemele rezolvate, iscălite de mai mulți corespondenți. Fiecare corespondent trebue să-și redacteze problema rezolvată de el, și s'o iscălească.

Fiecare problemă rezolvată, notă sau articol trebuesc scrise pe sferturi de coale de hârtie și însoțite de enunț. Problemele propuse trebuesc însoțite și de soluțiile lor.

Abonamentul pe anul XVII-lea al revistei, care a început cu numărul 1 la 15 Martie 1937, costă 100 (UNA SUTA LEI) și se trimite prin contul CEC No. 85208, sau prin mandat postal pe adresa: Prof. C. TEODORESCU, rectorul Școalei Politechnice, Timișoara.

ANUL XVII. 15 MAIU 1937 No. 3.

REVISTA MATEMATICĂ
DIN
TIMIȘOARA

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA APARE ODATA PE LUNA.
PREȚUL UNUI NUMAR 12 LEI PREȚUL ABONAMENTULUI 100 LEI PE AN.

CUPRINSUL

1 EMILE BOREL · LES MATHEMATIQUES A L'EXPOSITION 1937.
2. PROF. IOAN CUREA: ASUPRA REZOLVARI SISTEMELOR DE ECUATII DE GRAD SUPEPIOR.
3. NOTE MATEMATICE: 6, 7.
4. BIBLIOGRAFIE.
5. PROBLEME REZOLVATE: 1457, 1469, 1473, 1479, 1497, 1504, 1505.
6. PROBLEME PROPUSE: 1578-1585.
7. INFORMATIUNI.

TIMISOARA
Institut de Arte grafice Tipografia Românească

„Orice profesor de matematici, din orice colţ al ţării şi de la orice şcoală, trebuie să fie apostol al specialităţii sale. Din felul cald şi luminos cum îşi face lecţiile, din drumul drept şi demn pe care îl urmează în viaţă, trebuie să apară limpede că judecata matematică precisă şi sigură, curată ca cristalul, are o înaltă şi admirabilă valoare educativă pentru viaţă.

Adevărul curat, adevărul drept, adevărul luminos, să fie îndreptarul vieţei noastre. Aceasta să fie contribuţia specialităţii noastre la îndrumarea neamului românesc, pe calea care-i stă deschisă".

G ŢIŢEICA

Manuscrisele destinate Revistei Matematice din Timişoara conţinând soluţiunile problemelor propuse şi probleme, note sau articole originale vor fi trimise pe adresa: **V. Alaci,** profesor Şcoala Politechnică, Timişoara.

Plata abonamentului precum şi reclamaţiunile de neprimirea Revistei vor fi adresate d-lui **Prof. C. Teodorescu,** Rectorul Şcoalei Politechnice din Timişoara.

Plata abonamentului se face prin CEC (Casa de economii şi cecuri postale. unde revista are contul CEC No. 85208, sau prin mandat postal adresat d-lui Prof. C. TEODORESCU, Rectorul Şcoalei Politechnice din Timişoara.

Taxa de Membru în „Comitetul de Conducere al Revistei Matematice din Timişoara" este pentru anul XVII, de 200 (două sute) lei.

Colecţia R. M. T., se găseşte la Administraţia Revistei, şi se poate procura în schimbul preţului:

Anul I, epuizat. Anii: II—XVI inclusiv, broşate, 120 lei fiecare.

Rugăm pe corespondenţii nostrii, a ne trimete de urgenţă costul abonamentului de 100 (una sută) lei, pentru „R. M. T." pe anul XVII, care a început la 15 Martie 1937.

ANUL XVII — No. 3. TIMISOARA, 15 MAIU 1937

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA

APARE LA 15 A FIECAREI LUNI

PREŢUL UNUI NUMAR . . . . . 12 LEI
ABONAMENT ANUAL . . . . . 100 LEI
Abonamentele sunt socotite totdeauna dela 15 Martie

REDACŢIA: Prof. V. ALACI
Şcoala Politechnică din Timişoara.
ADMINISTRAŢIA: Prof. C. TEODORESCU
Rectorul Şcoalei Politechnice din Timişoara.

LES MATHEMATIQUES A L'EXPOSITION 1937

PAR EMILE BOREL
Membre de l'Institut,
Professeur à la Faculté des Sciences de Paris.

Il était nécessaire que les mathématiques aient leur place dans le Palais de la Découverte. Il aurait été, en effet, vraiment singulier de laisser de côté la science qui est la source de toutes les autres.

Chacun sait que, sans les spéculations abstraites et géométriques des Grecs, le mouvement scientifique qui a commencé au seizième et au dix-septième siècle, pour aboutir, au dix-neuvième, à ce grand épanouissement de la science et de l'électricité pour ne parler que de celle-ci, n'aurait pas pu être créée et le monde serait tout différent de ce qu'il est aujourd'hui.

Personne, assurément, ne peut prévoir quelles seront les conséquences pratiques des spéculations actuelles des mathématiques qui sont de plus en plus complexes et s'éloignent de plus en plus des réalités. Mais toute l'histoire de la science nous autorise à penser que tôt ou tard, ces spéculations influeront sur les autres sciences et contribueront à leur développement. C'est souvent, en effet, après plusieurs dizaines d'années, quelquefois après plus d'un siècle, que la découverte mathématique a été utilisée pour le progrès des autres sciences.

En donnant aux mathématiques, sous une forme quelconque, une place dans le Palais de la Découverte, on rappellera à tous les visiteurs le rôle primordial que les mathématiques ont joué, et continuent à jouer, dans le développement général de la découverte scientifique.

Mais une Exposition doit être capable d'ntéresser un très grand nombre de personnes et de retenir leur attention. Est-il possible de réaliser, à propos des mathématiques, ces conditions cependant indispensables?

Il est trop évident qu'on ne pouvait songer à faire comprendre je ne dis pas au grand public, mais même à un public restreint, en quoi consistent les recherches et les découvertes des mathématiques actuellement vivantes. Il faut, en effet, pour aborder les parties de la science où des découvertes encore nombreuses restent à faire, de très longues études préalables qui ne peuvent être entreprises et menées à bien que par un très petit nombre de personnes. Ceux qui n'ont acquis des mathématiques que les notions exposées dans l'enseignement primaire et dans l'enseignement secondaire, se font nécessairement une idée très incomplète et très fausse de ce que sont les travaux des mathématiciens. La plupart d'entre eux, fort heureusement, ne se posent aucune question à ce sujet. Quelques-uns, cependant s'imaginent volontiers que les mathématiciens passent leur temps à exécuter des calculs compliqués et à extraire des racines cubiques.

Fallait-il donc renoncer à atteindre le grand public, et chercher seulement à intéresser les visiteurs encore assez nombreux, qui ont poussé plus loin, en vue d'examens, leurs études mathématiques modernes. Mais, en fait, tous ceux dont la culture mathématique s'est bornée à passer même brillamment, les examens d'entrée et de sortie de nos grandes écoles, sont en général presque aussi ignorants que le grand public de ce qu'est réellement la découverte mathématique. Ils le sont peut-être même davantage, s'il est „l'Espace"... s'il est exact que c'est un deuxième degré de l'ignorance que de croire savoir et d'ignorer que l'on ignore. Seuls, ceux qui se sont consacrés eux-mêmes à la recherche, savent en quoi elle consiste

et quels en sont les buts et les moyens. Leur nombre est très restreint et ne dépasse pas quelques centaines pour le monde entier. Presque tous, d'ailleurs, sont forcés de se borner à un domaine particulier de la science mathématique, laquelle devient de plus en plus vaste et sont souvent très ignorants des autres domaines de cette science. Un très petit nombre d'hommes ont eu, au cours du dix neuvième siècle la puissance d'esprit nécessaire pour dominer les mathématiques tout entières. On peut citer: *Gauss*, *Cauchy*, *Henri Poincaré*. Si on avait conçu l'Exposition sous la forme d'une Encyclopédie à laquelle auraient collaboré quelques douzaines de mathématiciens, le nombre de ceux qui s'y seraient intéressés aurait été encore plus restreint.

Il fallait donc renoncer résolument à exposer véritablement la découverte mathématique. Cette exposition n'aurait pu d'ailleurs être faite que sous forme de livres, car la pensée abstraite ne peut être mise dans une vitrine. Si des calculs au moyen de symboles algébriques et analitiques sont souvent nécessaire aux mathématiciens pour vérifier leurs idées et les développer jusqu'au bout, ce ne sont pas cependant ces calculs eux-mêmes qui constituent la découverte: celle-ci naît dans l'esprit de méditations silencieuses.

La seule chose possible était donc de donner, sous une forme sensible, quelques exemples, quelques échantillons de ce que sont les mathématiques, de manière à essayer de les entrainer progressivement jusqu'au moment où ils perdent pied, où ils ne peuvent plus suivre, mais où, cependant, ils se rendent compte que d'autres peuvent aller plus loin.

Tous ceux qui ont appris au collège les éléments de la géométrie savent ce qu'est le nombre π: rapport de la circonférence au diamètre. Montrer, d'une part, que ce nombre peut être calculé expérimentalement par les méthodes du calcul de probabilités (problème de l'aiguille de *Buffon*) et que l'on peut ainsi obtenir des résultats relativement précis en interrogeant le hasard: montrer, d'autre part, que les quelques décimales connues de tous ne sont rien non plus à côté de celles qu'on a pu calculer, lesquelles ne sont encore rien à côté de l'infinité des décimales qui restent inconnues; voilà des leçons de choses qui complètent fort utilement la simple définition de „π".

Chacun connait, soit par expérience, soit par ouï-dire, quelques unes des courbes géométriques. Essayer de faire entrevoir, l'infinie variété de ces courbes, montrer à l'occasion, leurs rapports avec certaines formes naturelles, c'est encore là une leçon de choses qui élargira singulièrement les idées de ceux qui visiteront, même rapidement l'Exposition.

Serait-il possible d'aller plus loin? De réaliser des films cinématographiques qui permettraient en quelques minutes, d'avoir au moins quelque intuition de ce que sont les recherches sur la théorie moderne de la relativité et sur la quatrième dimension? Serait-il possible d'illustrer de manière à les rendre tangibles pour tous, ces recherches récentes, si curieuses de mon ami le savant *Vito Volterra*, sur les applications du calcul aux phénomènes de lutte pour la vie entre deux espèces animales dont l'une pourchasse et dévore l'autre? Nous l'espérons et nous nous y efforcerons. Nous voudrions qu'à côté de ce que le public s'attendra à trouver dans cette Exposition, il ait quelque surprise qui l'intéresse et le retienne.

C'est pour cela que nous ne négligerons pas complétement l'anecdote, sous la forme des récréations methématiques. Certains problèmes, cependant fort simples étonnent et déconcertent, parce que la solution, qui semblerait indiquer le bon sens se trouve être faussé et qu'un peu de reflexion suffit cependant à montrer qu'on peut rectifier le bon sens du premier degré, par un bon sens du deuxième, du troisième degré... C'est là une excellente leçon que donnent les mathématiques et dont l'application n'est pas bornée à leur domaine.

Enfin, il ne sera pas possible de laisser de côté les relations des mathématiques avec les autres sciences ou avec les applications industrielles. Si les plus importantes et les plus abstraites de ces applications seprêtent mal à l'exposition publique, il sera tout au moins possible de donner des exemples de calculs ingrats et pénibles qui sont nécessaires pour une de ces belles réalisations de l'industrie moderne qui font l'admiration des hommes: grands paquebots, Tour Eiffel, etc...

Il en est de même pour certains phénomènes

naturels, comme les aurores boréales magnétiques, dont la théorie détaillée est extrêmement compliquée.

Ceux qui ont consacré leur temps et leur effort à l'organisation de cette Exposition, et au premier rang desquels il faut citer le très actif et très dévouè secretaire de la section mathématique, *M. A. de Sainte-Lague,* se regarderont comme largement récompensée de leur peine s'ils arrivent à faire soupçonner aux visiteurs, l'étendue, la beauté et la poésie des mathématiques. Ils le seront encore bien davantage si, parmi les jeunes qui visiteront cette Exposition, il en est quelques uns qui sont séduits par cette beauté et cette poésie et qui se trouvent entrainés à consacrer leur vie à des recherches abstraites qui sont une des gloires de l'esprit humain, qui ont été et qui restent le facteur le plus important du progrès.

ASUPRA REZOLVARII SISTEMELOR DE ECUAŢII DE GRAD SUPERIOR

De Prof Ioan Curea

Sistemele de ecuaţii cu mai multe necunoscute, în care acestea întră la puteri mai mari decât unitatea, se rezolvă cu ajutorul unei sau mai multor ecuaţii cu o singură necunoscută.

De obiceiu, pentru a obţine aceste ecuaţii ajutătoare, se caută să se formeze, din ecuaţiile sistemului dat, suma tuturor necunoscutelor, suma produselor lor câte două, suma produselor lor câte trei, câte patru, etc.

Atunci, dacă se înfăţişează necunoscutele sistemului ca fiind rădăcinile unei ecuaţii cu o singură necunoscută, s'au obţinut tocmai relaţiile dintre rădăcinile şi coeficienţii acelei ecuaţii şi care, astfel, se poate scrie imediat.

In R. M. T. au fost rezolvate, pe această cale, foarte multe astfel de sisteme.

Ecuaţiile auxiliare cu o singură necunoscută le putem forma insă, de multe ori, mai uşor prin altă metodă, pe care o vom arăta aci. Anume, dând aceeaş interpretare necunoscutelor sistemului, vom căuta să formăm, în locul relaţiilor dintre rădăcinile şi coeficienţii unei ecuaţii cu o singură necunoscută, suma aceloraş puteri ale rădăcinilor ei, adică vom căuta să obţinem valoarea expresiunilor

$$(1)\qquad \begin{aligned} \Sigma x_i &= x_1 + x_2 + \cdots + x_m \\ \Sigma x_i^2 &= x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_m^2 \\ \Sigma x_i^3 &= x_1^3 + x_2^3 + \cdots + x_m^3 \\ &\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

După cum se ştie, aceste expresiuni simetrice se pot exprima raţional în funcţie de coeficienţii ecuaţiei, cu ajutorul relaţiilor dintre rădăcini şi coeficienţi.

Astfel, pentru ecuaţia

$$x^m + A_1 x^{m-1} + A_2 x^{m-2} + \cdots + A_{m-1} x + A_m = 0,$$

sumele (1) se pot calcula, din aproape în aproape, când $n \lesseqgtr m$, cu formula de recurenţă[1]

$$\Sigma x_i^n + A_1 \Sigma x_i^{n-1} + A_2 \Sigma x_i^{n-2} + \cdots$$
$$\cdots + A_{m-1} \Sigma x_i + n A_m = 0,$$

iar pentru $n > m$, de exemplu $n = m + p$, cu formula

$$\Sigma x_i^{m+p} + A_1 \Sigma x^{m+p-1} + \cdots + A_{m-1} \Sigma x^{p+1} + A_m \Sigma x_i^p = 0.$$

Pentru ecuaţia de gradul al treilea

$$x^3 + p x^2 + q x + r = 0,$$

obţinem în felul acesta

$$(2)\qquad \begin{aligned} \Sigma x_i &= -p \\ \Sigma x_i^2 &= p^2 - 2q \\ \Sigma x_i^3 &= -p^3 + 3pq - 3r \\ \Sigma x_i^4 &= p^4 - 4p^2 q + 4pr + 2q^2 \\ \Sigma x_i^5 &= -p^5 + 5p^3 q - 5p^2 r - 5pq^2 + 5qr \\ &\cdots\cdots\cdots, \end{aligned}$$

iar pentru ecuaţia de gradul al patrulea

$$x^4 + p x^3 + q x^2 + r x + s = 0$$

avem:

$$(3)\qquad \begin{aligned} \Sigma x_i &= -p \\ \Sigma x_i^2 &= p^2 - 2q \\ \Sigma x_i^3 &= -p^3 + 3pq - 3r \\ \Sigma x_i^4 &= p^4 - 4p^2 q + 4pr + 2q^2 - 4s \\ \Sigma x_i^5 &= -p^5 + 5p^3 q - 5p^2 r - 5pq^2 + 5qr + 5ps \\ &\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

[1]) Formula lui *Newton.*

Relaţiile acestea sunt deobicei suficiente în practică.

Dacă acum am putut găsi, din ecuaţiile sistemului dat, valoarea numerică a sumelor Σx_i, Σx_i^2,... atunci rezolvarea sistemului se reduce: 1°. la rezolvarea unui alt sistem ajutător de forma (2) sau (3) şi 2°. la rezolvarea ecuaţiilor cu o singură necunoscută ce se scriu cu ajutorul coeficienţilor $p, q,\ldots$ daţi de sistemul auxiliar.

Greutatea problemei depinde deci de greutatea de a forma sistemul (2) sau (3) şi de a-l rezolva, fiindcă ecuaţiile cu o singură necunoscută la care suntem conduşi astfel sunt, evident, aceleaşi ca şi la metoda relaţiilor dintre rădăcini şi coeficienţi.

Ecuaţiile (2) şi (3) se simplifică foarte mult când suma tuturor necunoscutelor este zero, adică dacă avem $\Sigma x_i = -p = 0$. Ele devin în acest caz,

$$(4)\quad \begin{aligned} \Sigma x_i &= 0 \\ \Sigma x_i^2 &= -2q \\ \Sigma x_i^3 &= -3r \\ \Sigma x_i^4 &= 2q^2 \\ \Sigma x_i^5 &= 5qr \\ &\cdots\cdots \end{aligned} \qquad (5)\quad \begin{aligned} \Sigma x_i &= 0 \\ \Sigma x_i^2 &= -2q \\ \Sigma x_i^3 &= -3r \\ \Sigma x_i^4 &= 2q^2 - 4s \\ \Sigma x_i^5 &= 5qr + 5ps \\ &\cdots\cdots \end{aligned}$$

Este de sine înţeles însă, că pentru ca această metodă să fie folositoare, ea trebue aplicată numai acolo unde poate aduce o simplificare. Unele sisteme pot fi rezolvate, pe această cale, numai în urma unor calcule foarte anevoioase, după cum, în schimb, sunt altele care numai în acest fel pot găsi o soluţie.

Să arătăm cele expuse până aci prin câteva exemple.

Exemplul I. Pentru a rezolva sistemul

$$\begin{cases} x+y+z=6 \\ x^3+y^3+z^3=36 \\ x^4+y^4+z^4=98, \end{cases}$$

prin procedeul cunoscut, ridicăm la cub prima ecuaţie şi ţinem seama de a doua. Se obţine astfel

$$(x+y)(x+z)(y+z)=60.$$

Relaţia aceasta se poate scrie

$$(6-z)(6-y)(6-x)=60,$$

din care rezultă, dacă ţinem iarăş seama de ecuaţia întâi,

$$(1)\qquad 6(xy+xz+yz)-xyz=60.$$

Ridicând acum prima ecuaţie a sistemului la patrat şi având în vedere şi relaţia (1) avem

$$(2)\qquad 3(x^2+y^2+z^2)+xyz=48.$$

Ridicăm acum pe (1) şi (2) la patrat, ceace ne dă

$$36(x^2y^2+x^2z^2+y^2z^2+12xyz)+$$
$$x^2y^2z^2-12xyz(xy+xz+yz)=3600,$$
$$9[98+2(x^2y^2+x^2z^2+y^2z^2)]+$$
$$x^2y^2z^2+6xyz(x^2+y^2+z^2)=2304,$$

sau ţinând încăodată seama de (1) şi (2), avem:

$$36(x^2y^2+x^2z^2+y^2z^2)-x^2y^2z^2+312xyz=3600$$
$$18(x^2y^2+x^2z^2+y^2z^2)-x^2y^2z^2+96xyz=1422.$$

Eliminând acum primii termeni între aceste două ecuaţii, avem

$$(xyz)^2+120xyz-756=0,$$

de unde

$$xyz=6 \qquad \text{şi} \qquad xyz=-126.$$

Inlocuind în relaţia (1) valorile astfel găsite pentru xyz, avem respectiv:

$$xy+xz+yz=11 \quad \text{şi} \quad xy+xz+yz=-11.$$

Soluţiile sistemului propus sunt date deci de sistemele

$$\begin{cases} x+y+z=6 \\ xy+xz+yz=11 \\ xyz=6 \end{cases} \quad \text{şi} \quad \begin{cases} x+y+z=6 \\ xy+xz+yz=-11 \\ xyz=-126, \end{cases}$$

în care el s'a descompus, iar necunoscutele acestor sisteme, sunt respectiv rădăcinile ecuaţiilor

$$(3)\qquad \begin{aligned} m^3-6m^2+11m-6&=0 \\ m^3-6m^2-11m+126&=0. \end{aligned}$$

Aplicând acum procedeul expus mai înainte, suntem conduşi a rezolva sistemul

$$\begin{cases} -p=6 \\ -p^3+3pq-3r=36 \\ p^4-3p^2q+4pr+2q^2=98, \end{cases}$$

care ne dă imediat

$$p=-6, \quad q=-6, \quad q=\pm 11, \quad r=-6$$
$$\text{şi} \quad r=126.$$

Ecuaţiile (3), care dau rădăcinile sistemului propus, se scriu deci imediat.

Nu trebue să tragem de aci concluzia, că procedeul arătat aci, aduce o simplificare mare ori de câte ori sistemul dat, conţine, ca acesta, suma aceloraş puteri ale necunoscutelor. Reese aceasta clar din exemplul următor.

Exemplul II.
$$\begin{cases} x+y+z=2 \\ x^3+y^3+z^3=8 \\ x^4+y^4+z^4=18. \end{cases}$$

După observarea noastră, rezolvarea acestui sistem se reduce la rezolvarea sistemului ajutător

$$\begin{cases} -p=2, \\ -p^3+3pq-3r=8, \\ p^4-4p^2q+4pr+2q^2=18 \end{cases}$$

cu rădăcinile

$$p=-2, \qquad q=\pm 1, \qquad r=\mp 2$$

şi la rezolvarea ecuaţiilor cu o singură necunoscută corespunzătoare

$$m^3-2m^2-m+2=0 \text{ şi } m^3-2m^2+m-2=0.$$

Rădăcinile acestor ecuaţii fiind respectiv 1, —1, 2 şi $\pm i$, soluţiile sistemului propus sunt cuprinse în tabloul.

x	1	1	-1	-1	2	2	2
y	-1	2	1	2	1	-1	$+i$
z	2	-1	2	1	-1	1	$-i$

x	2	i	i	$-i$	$-i$
y	$-i$	2	$-i$	2	$+i$
z	$+i$	$-i$	2	$+i$	2

Intrebuinţând acum procedeul obicinuit sistemul acesta se rezolvă tot atât de uşor.

In adevăr ridicând ecuaţia întâi la cub şi ţinând seama de a doua, obţinem

$$(x+y)(x+z)(y+z)=0,$$

ceace ne dă imediat

$$x=-y,\ z=2;\ x=-z,\ y=2;\ y=-z,\ x=2,$$

deci

$$\begin{array}{lll} x^4=1 & x^4=1 & y^4=1 \\ x=\pm 1 & x=\pm 1 & y=\pm 1 \\ x=\pm i & x=\pm i & y=\pm i. \end{array}$$

Soluţiile sunt deci cele din tabloul de mai sus.

Exemplul III. Să considerăm în fine sistemul No. 1381, rezolvat în R. M. T., anul XVI, pag. 38

$$\begin{cases} xy+xz+yz=11 \\ x^2y^2+x^2z^2+y^2z^2=49 \\ x^3y^3+x^3z^3+y^3z^3=251\ ^{1}). \end{cases}$$

Notând

$$(1) \qquad xy=Z, \qquad xz=Y, \qquad yz=X,$$

se vede că problema se reduce la găsirea necunoscutelor noui X, Y, Z. In adevăr, dacă cunoaştem valoarea acestor cantităţi, vom avea, înmulţind între ele relaţiile (1),

$$(xyz)^2=XYZ, \quad \text{de unde} \quad xyz=\pm\sqrt{XYZ}.$$

Prin impărţiri succesive, avem apoi

$$x=\pm\sqrt{\frac{YZ}{X}}, \quad y=\pm\sqrt{\frac{XZ}{Y}}, \quad z=\pm\sqrt{\frac{XY}{Z}}.$$

Necunossutele X, Y, Z sunt soluţiile sistemului

$$\begin{cases} X+Y+Z=11 \\ X^2+Y^2+Z^2=49 \\ X^3+Y^3+Z^3=251, \end{cases}$$

care se găsesc foarte uşor după observaţia noastră.

Din sistemul auxiliar, pe care-l putem scrie în acest caz imediat, deducem

$$p=-11, \qquad q=36, \qquad r=-36.$$

Ecuaţia cu o singură necunoscută

$$m^3-11m^2+36m-36=(m-2)(m-3)(m-6)=0$$

ne dă atunci valoarea necunoscutelor X, Y, Z, deci şi pe acelea ale lui x, y, z.

NOTE MATEMATICE

6. — *Questions d'arithmétique.*

1. **Théorème.** *La différence des cubes de deux nombres entiers consécutifs positifs, ne peut être ni le double ni le triple d'un carré.*

Il s'agit de montrer que les équations

$$(x+1)^3-x^3=2y^2, \qquad (x+1)^3-x^3=3z^2,$$

ou

[1]) Enunţ corectat.

(1) $3x^2+3x+1-2y^2=0,$

(2) $3x^2+[3x]+1-3z^2=0,$

sont impossibles en nombres entiers positifs.

Or, les racines positives de ces équations (1) et (2),

$$x=\frac{1}{6}(-3+\sqrt{3(8y^2-1)}],$$

$$x=\frac{1}{6}[-3+\sqrt{3(12z^2-1)}],$$

nécessitent que les nombres

$$3(8y^2-1) \quad \text{et} \quad 3(12z^2-1)$$

soient les carrés d'un même nombre entier qui est nécessairement multiple de 3. Il devrait donc exister des entiers u et v tels que l'on aurait

(3) $8y^2-1=3u^2,$ (4) $12z^2-1=3v^2,$

ou, en posant $2y=m,\ 2z=n,$

(5) $2m^2-1=3u^2.$ (6) $2n^2-1=3v^2.$

Mais, m^2 et n^2 étant premiers avec 3 sont de la forme $M3+1$, et les équations (5) et (6) et, par suite (1) et (2), n'ont pas pas de solution entière.

2. **Théorème.** *La différence des cubes de deux nombres entiers positifs pairs ou impairs consésutifs, ne peut être ni le triple ni le quadruple d'un carré.*

En effet, les équations

$$(x+1)^3-(x-1)^3=3y^2 \quad \text{et} \quad (x+1)^3-(x-1)^3=4z^2,$$

se réduisent aux suivantes,

$$6x^2+2=3y^2 \quad \text{et} \quad 3x^2+1=2z^2,$$

lesquelles ne sont pas résolubles en nombres entiers, que x soit pair ou impair, car z^2, premier avec 3, est de la forme $M3+1$.

V. THÉBAULT
(LE MANS, FRANCE)

7. — *Sur une méthode d'obtenir une solution générale de l'équation*

$$x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2+x_{n+1}^2=y_1^2+y_2^2+\cdots+y_n^2+y_{n+1}^2,$$

à partir d'une solution générale d'une équation de même forme, mais renfermant un terme de moins dans chaque membre.

Nous considérons d'abord l'équation

$$x^2+y^2=x'^2+y'^2.$$

D'une solution de cette équation nous allons déduire une solution de

$$X^2+Y^2+Z^2=X'^2+Y'^2+Z'^2.$$

Nous savons qu'on a :

$$(mp-nq)^2+(mq+np)^2=(mp+nq)^2+(mq-np)^2.$$

Soit s un nombre entier quelconque ; nous avons identiquement, si x, y, x', y' prennent les valeurs donnés par les expressions précédentes,

$$x^2+y^2+s^2=x'^2+y'^2+s^2,$$

et encore,

$$(rx+tx')^2+(ry+ts)^2+(rs+ty')^2=$$
$$(rx'+tx)^2+(rs+ty)^2+(ry'+st)^2,$$

r et t étant quelconques.

Nous aurons donc, pour l'équation

$$X^2+Y^2+Z^2=X'^2+Y'^2+Z'^2,$$

les formules de résolution suivantes, obtenus en remplaçant x, x', y, y', par leurs valeurs en fonctions des 4 paramètres m, n, p, q :

$$\begin{cases} X=r(mp-nq)+t(mp+nq) \\ Y=r(mq+np)+st \\ Z=rs+t(mq-np) \end{cases}$$

$$\begin{cases} X'=r(mp+nq)+t(mp-nq) \\ Y'=rs+t(mq+np) \\ Z'=r(mq-np)+st. \end{cases}$$

Cette solution renferme 7 paramètres arbitraires, $m, n, p, q, r, s, t.$

Comme les valeurs de $x, y, s,$ d'une part, celles de $x', y', s,$ d'autre part, sont permutables entre elles, nous pouvons obtenir d'autres expressions pour X, Y, Z, X', Y', Z'.

Nous indiquerons les permutations entrant en ligne de compte, laissant au lecteur le soin d'établir les formules correspondantes.

(1) $x \quad y \quad s$
$x' \quad s \quad y'$

(voir les formules écrites plus haut)

(2) $x \quad y \quad s$
$y' \quad s \quad x'$

(3) $x \quad y \quad s$
$s \quad x' \quad y'$

(4) $x \quad y \quad s$
$s \quad y' \quad x'$

Exemples numériques.

a. $m=1,\ p=1,\ n=1,\ q=-1,\ r=2,\ s=3,\ t=4$

$$2^2+6^2+1^2=4^2+3^2+4^2\ (=41)$$

$$1^2+6^2+5^2=2^2+3^2+7^2\ (=62)$$

b. $m=1,\ p=1,\ n=2,\ q=-1,\ r=3,\ s=4,\ t=5$

$$4^2+23^2+3^2=12^2+17^2+11^2\ (=554)$$

$$29^2+12^2+7^2=27^2+4^2+17^2\ (=1034).$$

On peut aussi déterminer un paramètre de manière que l'un des termes s'annule. Donnons par exemple une solution générale de l'équation :

$$X^2+Y^2+Z^2=X'^2+Y'^2.$$

Il suffira de poser

$$Z'=r(mq-np)+st=0,$$

d'où :

$$t=\frac{r(np-mq)}{s}.$$

On trouve, en laissant le dénominateur commun de côté et en supprimant le facteur commune r :

$$\begin{cases} X=s(mp-nq)+(np-mq)(mp+nq) \\ Y=2npq \\ Z=s^2-(mq-np)^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} X'=s(mp+nq)+(np-mq)(mp-nq) \\ Y'=s^2+(np-mq)(mq+np), \end{cases}$$

les paramètres étant tous arbitraires, ou

$$\begin{cases} X=sx-x'y' \\ Y=2npq=s(y-y') \\ Z=s^2-y'^2 \end{cases} \qquad \begin{cases} X'=sx'-xy' \\ Y'=s^2-yy', \end{cases}$$

avec $x^2+y^2=x'^2+y'^2,$

s étant arbitraire.

Exemples :

$$m=1,\quad n=2,\quad p=3,\quad q=4,\quad s=5$$

$$\begin{cases} 3^2+40^2+21^2=45^2+5^2\ (=2050) \\ 3^2+5^2+96^2=45^2+85^2\ (=9250) \\ 7^2+4^2+5^2=9^2+3^2\ (=90) \end{cases}$$

Connaissant une solution générale de

$$x^2+y^2+z^2=x'^2+y'^2+z'^2,$$

on peut établir, par le même procédé, une solution générale, renfermant trois paramètres arbitraires de plus, de l'équation indéterminée

$$X^2+Y^2+Z^2+T^2=X'^2+Y'^2+Z'^2+T'^2.$$

En général, à partir d'une solution de

$$x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2=y_1^2+y_2^2+\cdots+y_n^2,$$

on peut déduire une solution générale de l'équation

$$x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2+x_{n+1}^2=y_1^2+y_2^2+\cdots+y_n^2+y_{n+1}^2.$$

A. GLODEN
(Luxenbourg)

BIBLIOGRAFIE

1. *Gazeta Matematică*, Anul XLII, No. 8, Aprilie 1937. Articol despre triunghiul echilateral (urmare de la pag. 360), de *Ernest Abason*. Parametrul parabolei circumscrise unui trapez, de *E. Caraman*. Despre originea teoremei lui *Pitagora*, de *Fl. Câmpan*. Premiul „Inginer *Al. Roşu*", de Ing. *D. A. Stan*, *Gih. Simionescu* şi *Al. A. Roşu*. Note matematice. Probleme rezolvate. Probleme propuse.

2. *Bulletin Mathématique de la Société Roumaine des Sciences*, tome 38 (2), 1936. Exkurs über die Dreiecke, von *D. Barbilian*. Sur les fonctions analytiques de deux variables réelles, par *Nicolas Cioranescu*. L'iteration des fonctions de moyenne, par *Nicolas Cioranescu*. Sur quelques propriétés métriques des ensembles de points, par *Alex. Froda*. Sur les relations de *Cauchy*, par *Paul Montel*. Remarques sur ma note: Familles normales de fonctions Polyharmoniques, par *Miron Nicolesco*. Sulla convergenza, delle successioni di funzioni iperarmoniche, di *Mauro Picone*. Sur un nouveau théorème de moyene pour les fonctions polyharmoniques, par *Miron Nicolesco*. Remarques sur les fonctions analytiques continues dans un domaine où elles admettent un ensemble parfait discontinu de singularités, par *S. Stoilov*.

3. *Bulletin de Mathématiques et de Phsique, pure et appliquées, de l'École Polytechnique Roi Carol II, Bucarest*, Fasc. 19, 20. 21, VII-ème année, 1937. Un théorème de *M D. Pompeïu*, par *Georges Bratu*. Sur un théorème de *M. D. Pompeïu*, par *N. Obrechkoff*. Sur un théorème de *M. D. Pompeïu*, par *Harold Hilton*. Sur une propriété du triangle équilatéral, par *Ernest Abason*. Un théorème de Géométrie, par *Ernest Abason*. Une relation entre nombres complexes et la généralisation d'un théorème de géométrie élémentaire, par *N. G. Botea*. Sur certaines configurations d'homographies planes, par *A. Pantazi*. Sur une propriété du rotationnel, par *Georges Bouligand*. Sur quelques applications de la propriété du module d'une fonction holomorphe, par *D. Pompeïu*. Contribution à l'étude des intégrales à l'infini, des équations différentielles linéaires, par *T. Peyovitch*. Sur le nombre des valeurs exceptionnelles des fonctions algébroïdes, par *M. Ghermanesco*. Quelques remarques relatives à la dérivée superficielle d'une fonction de deux variables, par *Nicolas Cioranesco*. L'influence de l'addition du potassium sur le gradient de la colonne positive de l'arc du Mercure, par *Ilie C. Purcariu*. Sur la détermination de l'indice de la réfraction des lentilles, par *D. Teodoresco*. Le rôle des capillaires et du chlorure de radium dans les phénomènes biologiques, par *E. Toporescu*. Nouvelle méthode de Fabrication de l'Epérite, par *Costin D. Nenitzesco* et *Nicolas Scarlatesco*. Sur l'état d'oxydation du fer dans certaines scories de l'élaboration de l'acier, par *Welton J.*

Crook. L'avion avec 1000 km/h., par *I. Linteş.* Sur une application de l'affinitée en cinématique, par *P. Popovăţ.* Calcul des plaques élastiques rectangulaires simplément appuyées sur le pourtour et soumises à la flexion par un moment le long d'un côté, par *Cristea Mateescu.* Sur la flexion des piéces droites, par *G. G. Constantinesco.* Le gradient de la colonne positive de l'arc dans la vapeur de Potassium, par *Ilie C. Purcariu.* Lignes de champ magnétique d'une circuit filiforme, symétrique et plan, deux fois coudé, pal *Sabba S. Stefanescu.* Sur les réseaux à résistance constante, par *J. Constantinesco.* Sur la réaction en basse fréquence dans les amplificateurs à lampes, par *Matei Marinesco.* Ladung Sammlerbatterien mittels Trockengleichrichtern, von *A. Avramesco.* L'aspect scientifique de la technique graphique, par *Al. Bunesco.* Méthode pour l'analyse granulométrique d'un béton durci, par *Serban C. Solacolu.* Sur le diamétre économique d'une conduite de refoulement et sur l'exploitation de cette conduite, par *Henri Theodoru.*

4. *Stiinţă şi Progres, Revista Stiinţifică a liceelor Militare*, anul IV, No. 1, Aprilie 1937. Asupra determinanţilor nuli, de Prof. *V. Vasu.* Ceva despre magnetismul pământesc, de Căp. *Alexandru Ionescu-Pelican.* Activitatea optică la substanţele organice, de Prof *Ioan M. Golovcencu.* Publicaţii noui. Probleme rezolvate şi Propuse.

5. *Revista Cercului de Studii şi a Asociaţiei Absolvenţilor Şcoalei Superioare P. T. T.*, an. VI, No. 3, Martie 1937 (litografiat). Cuprinde articole de specialitate şi are şi o pagină Matematică.

6. *Cadastru.* Asociaţia inginerilor cadastrali din Banat, an. II, No. 3—4, Aprilie—Maiu 1937. Lucrările geodezice şi cartografice în Danemarca, de Ing. *A. Şt. Coliu.* Ridicări subterane, de Ing. *I. Sarmeş.* Memoriu asupra cercetărilor în legătură cu ridicarea şi fixarea traseului pentru un drum carosabil, de Ing. *I. Suhov.* Parcelarea triunghiurilor, de Ing. *T. Dărăbaş.* Note, de *D. Dumitrescu* şi Ing. *I. Kiss.*

7. *A. Myller.* La courbure de *Bacaloglo.* (Extrait des Annales Scientifiques de l'Université de Jassy, T. XXIV, F. 1—4.)

8. *A. Myller.* Tricentenarul Geometriei Analitice.

9. *A. Myller.* La torsion moyenne d'une surface. (Extrait des Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences, t. 203, 1936).

10. *Pl. Andronescu.* Graphische Darstellung der Wirk-, Blind-, Verzerrungs- und Scheinleistung, sowie eln Beitrag zum Problem der Wechselströme beliebiger Kurvenform. (Archiv für Elektrotechnik, XXXI. B. 1937.)

11. *Ing. Dr. Valeriu Patriciu.* Probleme fundamentale pentru viitorul industriei noastre de petrol. (Institutul Român de Energie, No. 122, 1937.)

12. *Adrian Stambuleanu.* Beitrag zur Frage des Wärmeüberganges in der Ansaugeperiode bei Verbrennungsmotoren mit hängenden Ventilen insbesondere bei Flug- und Kraftfahrzeug-Motoren. (Extrait du „Bulletin Scientifique de l'École Polytechnique de Timişoara, T. 6, fasc. 3 -4, 1936).

13. *S. Stoilov.* La Topologie et la Théorie des Fonctions. (Actes du Congrès intérbalcanique de mathématiciens, Athénes, Septembre 1934.)

14. *W. Sierpinski.* Sur une décomposition du segment en plus que 2^{N_0} ensembles non mesurables et presque disjoints (Extrait de „Fundamenta Mathematicae", Tome XXVIII.)

15. *W. Sierpinski.* Sur les fonctions dépendantes. (Extrait du „Fundamenta Mathematicae, Warszawa, 1936.)

16. *Theofilo Vescan.* Consideraciones sobre la mecanica vectorial y relativista de los medios deformables. (Boletino Matematico, an. IX, No. 7, 1936.)

17. *Théophile Vescan.* Une formule de la réfraction astronomique déduite de la forme parabolique du trajet lumineux. (Extrait du „Bulletin Scientifique de l'École Polytechnique de Timişoara, T. 6, F. 1—2.)

18. *Teofil Vescan.* Teoria Cinetică elementară a gazelor. (Extras din revista „Stiinţă şi Progres", Noemvrie 1935.)

19. *Tullio Levi-Civita.* Movimenti per sola gravitazione di un sistema continuo. (Extratto da „Scritti matematici", offerti a *Luigi Berzolavi*, 1936.)

20. *V. Thébault.* Questions de Géométrie. (Suplément à Mathesis, 1936.)

21. *V. Thébault.* Note sur la théorie des nombres (Suplément à Mathesis, 1936)

22. *V. Thébault.* La sphère de *Longchamps.* (Extrait de l'Enseignement mathématique, an 36, 1937)

23. *V. Thébault.* Sur les sphères de *S. Roberts.* (Extrait des Annales de la Société scientifique de Bruxelles, Tome LXVII, 1937.)

24 *J Karamata* Compléments au théorème *d'Abel* et de son inverse. (Extrait, Revue Mathématique de l'Union Interbalkanique, T. 1, F. II, 1936.)

25. *J Karamata.* Quelques moyens particuliers pour établir des théorèmes inverses des procédés de sommabilité. (Extracto de la Revista de Ciencias, an. XXXVIII, 1936.)

26. *Letterio Toscano.* Determinanti involutori. (Reale Istituto Lombardo di Scienze e Lettere, vol. LXI, 1928).

27. *Letterio Toscano.* Una trasformazione di Pincherle e somma di alcune serie numeriche. (Anais da Faculdade de Ciencias do Porto, t. XXII, 1936.)

PROBLEME REZOLVATE

1457. — *a şi b fiind două cifre consecutive, în ce sistem de numeraţie avem:*

$$a\,a\,a\,a = (b\,b)^2.$$

V. THÉBAULT

Dacă B este baza de numeraţie a sistemului, relaţia din enunţ se poate scri:

$$a(B^3+B^2+B+1) = b^2(B+1)^2,$$

sau:

$$a(B+1)(B^2+1) = b^2(B+1)^2.$$

Simplificând cu $B+1 \neq 0$, căci B nu poate fi egal cu -1, avem:

$$(1)\quad a(B^2+1) = b^2(B+1) = (a+1)^2(B+1),$$

fiindcă prin ipoteză $b = a+1$.

Relaţia (1) se mai poate scri:

$$\frac{a}{(a+1)^2} = \frac{B+1}{B^2+1}.$$

Cum fracţia din primul membru este ireductibilă, rezultă că trebuie să avem:

$$(2)\quad \begin{cases} B+1=ka \\ B^2+1=k(a+1)^2 \end{cases} \qquad (k \text{ intreg, pozitiv şi} > 1$$

Scoţând valoarea lui B din prima ecuaţie şi înlocuind'o în a 2-a, avem:

$$(k\,a-1)^2+1=k(a+1)^2,$$

sau:

$$(3)\qquad k(k-1)a^2-4ka-(k-2)=0.$$

Această ecuaţie cu necunoscutele a şi k trebuie rezolvită în numere întregi. In adevăr din ecuaţia (3) deducem:

$$(4)\qquad a=\frac{2k\pm\sqrt{4k^2+k(k-1)(k-2)}}{k(k-1)}=$$

$$\frac{2k\pm\sqrt{k(k^2+k+2)}}{k(k-1)}.$$

Câtimea de sub radical trebuind să fie patrat perfect, urmează ca factorul

$$k^2+k+2=k(k+1)+2,$$

care nu i patrat perfect, să se dividă prin k şi e suficient pentru aceasta să luăm

$$k=2.$$

In acest caz, rezultă din (4),

$$a=\frac{4\pm4}{2},$$

deci, $a=4$ şi $a=0$. Evident că numai $a=4$ convine.

Având astfel $a=4$, $k=2$, deducem din prima relaţie din (2):

$$B=2\times4-1=7.$$

Deci baza sistemului de numeraţie cerut este 7, iar relaţia din enunţ se poate scri în această bază:

$$4444=(55)^2.$$

Soluţii date de d-nii: *Amărăşteanu F. Marcel* (bacalaureat, Craiova) şi *Matei D. D-tru* (lic. Internat, Iaşi).

Observare. D-l *Matei D. D-tru,* a folosit cunostinţele din Nota matematică a d-lui *V. Thébault,* din „R. M. T.", vol. XVI, pag. 55.

1469. — *Să se rezolve sistemul:*

$$\begin{cases} x^{12}+y^{12}=4097 \\ x^8y^4+x^4y^8=272 \end{cases}$$

M. I. PREDOESCU

Adunând la prima ecuaţie, a 2-a ecuaţie multiplicată cu 3, avem:

$$(x^4+y^4)^3=4913=17^3.$$

De aci deducem,

$$(1)\quad x^4+y^4=17,\quad x^4+y^4=17\alpha,\quad x^4+y^4=\alpha^2,$$

unde 1, α, α^2 sunt rădăcinele cubice ale unităţii, adică rădăcinele ecuaţiei $t^3-1=0$.

Ecuaţia 2-a a sistemului, care se mai poate scri

$$x^4y^4(x^4+y^4)=272$$

devine în virtutea relaţiilor (1):

$$x^4y^4=\frac{272}{17}=16,\qquad x^4y^4=\frac{272}{17\alpha}=16\alpha^2,$$

$$x^4y^4=\frac{272}{17\alpha^2}=16\alpha.$$

Sistemul dat este echivalent cu următoarele sisteme:

$$\begin{cases} x^4+y^4=17 \\ x^4y^4=16, \end{cases} \qquad \begin{cases} x^4+y^4=17\alpha \\ x^4y^4=16\alpha^2, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^4+y^4=17\alpha^2 \\ x^4y^4=16\alpha. \end{cases}$$

Necunoscutele x^4, y^4 din aceste sisteme, sunt respectiv rădăcinele ecuaţiilor de gradul al 2-lea:

$$(2)\qquad z^2-17z+16=0$$

$$(3)\qquad z^2-17\alpha z+16\alpha^2=0$$

$$(4)\qquad z^2-17\alpha^2z+16\alpha=0.$$

Rezolvind aceste ecuaţii avem corespunzător:

$$z=\frac{17\pm\sqrt{289-64}}{2}=\frac{17\pm15}{2},$$

$$z=\frac{17\pm15}{2}\alpha,\qquad z=\frac{17\pm15}{2}\alpha^2.$$

Rezultă de aci sistemele:

$$\begin{cases} x^4=16 \\ y^4=1, \end{cases} \quad \begin{cases} x^4=1 \\ y^4=16, \end{cases} \quad \begin{cases} x^4=16\alpha \\ y^4=\alpha, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^4=\alpha \\ y^4=16\alpha, \end{cases} \quad \begin{cases} x^4=16\alpha^2 \\ y^4=\alpha^2, \end{cases} \quad \begin{cases} x^4=\alpha^2 \\ y^4=16\alpha^2 \end{cases}$$

Primul din aceste sisteme rezolvat, ne dă:

x	2	2	2	2	-2	-2	-2	-2	$2i$	$2i$
y	1	-1	i	$-i$	1	-1	i	$-i$	1	-1

x	$2i$	$2i$	$-2i$	$-2i$	$-2i$	$-2i$
y	i	$-i$	1	-1	i	$-i$

, $(i=\sqrt{-1})$

Analog se rezolvă şi celelalte sisteme.

Soluţii analoage date de d-rile: *Comloşan Cornelia* (studentă, Cluj), *Savin Maria* şi de d-nii: *Amărăşteanu F. Marcel* (bacalaureat, Craiova), *Cazanacli V Petre* (Chişinău), *Dăscălescu Hristache* (Focşani), *Florescu L. Victor* (lic. Milit, N. Filipescu). *Kornis Ernest* (lic. Loga, Timişoara), *Milu I. N.* (bacalaureat), *Negulescu D. Ştefan* (lic. Milit, N. Filipescu), *Popoviciu I. Gavril* (bacalaureat), *Pădureţ Vasile* (lic. Milit., Chişinău), *Rosemberg I* (lic. Roman) *Tilică C Ştefan* şi *Zagaican Ilie* (Conductor de L. P)

1473. — *Să se găsească un patrat perfect de cinci cifre de forma* $abcba$ *ştiind că rădăcina sa patrată este de forma* ada *şi că cifrele* a, b, c *sunt în progresie aritmetică de raţie* d.

T. L. BERINDE

Soluţia acestei probleme este cuprinsă în soluţia dată la pag. 7, Vol. XV, problemei 319, propusă de d-l g-l *Gh. Buicliu.* In problema 319 se cer patratele de forma $abcab$ şi $abcba$ fără nici o condiţie între cifrele a, b, c.

Singurul patrat, care răspunde condiţiilor problemei 1473, este:

$$121^2 = 14641.$$

Au rezolvat bine problema, independent de cunoaşterea problemei 319, d-ra: *Savin Maria* (Iaşi) şi d-nii: *Amărăşteanu F. Marcel* (bacalaureat, Craiova), *Cazanacli P.* (Chişinău), *Davidovici Paul* (lic. Vaslui), *Dăscălescu St. Hristache*, *Diaconescu Marcel*, *Jidanu I. C-tin* (l c. Beiuş), *Kornis Ernest* (lic. Loga, Timişoara), *Lupescu Gh. Corneliu* (Şc. Of. de Artilerie), *Matei D. D-tru* (lic. Internat, Iaşi), *Milu I. N.* (bacalaureat), *Moisovici M. Ştefan* (bacalaureat), *Murgu V. Marţian* (lic. Beiuş), *Negrea A. Mircea* (Brăila), *Olaru Eugen* (Abrud), *Petrescu-Craioviţa Anastasie* (Craiova), *Popovici I. Gavril* (student), *Ripianu Andrei* (lic. Braşov), *Rosemberg I.* (lic. Roman), *Ştefănescu Costin* (lic. Militar, N Filipescu) şi *Tilica C. Ştefan.*

1479. — *Dacă* $B+C=\frac{\pi}{2}$, *atunci avem identitatea:*

$$\frac{(1+\sin B)(1+\sin C)}{(1+\sin B+\sin C)^2}=\frac{1}{2}$$

CORNELIA NANES

Dacă $B+C=\frac{\pi}{2}$, rezultă

$$\sin C=\cos B,$$

astfel că primul membru al identităţii cerute, pe care să'l notăm cu E, se poate scri succesiv:

$$E=\frac{(1+\sin B)(1+\cos B)}{(1+\sin B+\cos B)^2}=$$

$$\frac{1+\sin B+\cos B+\sin B\cos B}{1+\sin^2 B+\cos^2 B+2\sin B+2\cos B+2\sin B\cos B}=$$

$$\frac{1+\sin B+\cos B+\sin B\cos B}{2(1+\sin B+\cos B+\sin B\cos B)}=\frac{1}{2}.$$

Astfel identitatea cerută este stabilită.

Soluţii date de d-ra: *Comloşan Cornelia* (studentă, Cluj) şi de d-nii: *Amărăşteanu F. Marcel* (bacalaureat, Craiova), *Andrunachievici Vladimir* (bacalaureat, Chişinău), *Cazanacli V. Petre* (Chişinău), *Kornis Ernest* (lic. Loga, Timişoara), *Lăzărescu Stelian* (lic. Milit., N. Filipescu), *Negrea Mircea* (Brăila), *Negulescu D. Ştefan* (lic. Milit., N. Filipescu), *Petrescu-Craioviţa Anastasie* (Craiova), *Tilică C. Ştefan* şi *Vlad I. C. M.* (Sub-Lt).

1497. — *Să se găsească numerile întregi* a, b, c *consecutive şi de două cifre ştiind că numărul* c^2-a^2 *este răsturnatul lui* b^2-a^2.

OCTAVIAN GH. RADULESCU

c^2-a^2 fiind răsturnatul lui b^2-a^2 şi a, b, c fiind consecutive, rezultă

$$a<b<c$$

şi anume:

$$b=a+1, \qquad c=a+2.$$

De aci rezultă:

$$c^2-a^2=(a+2)^2-a^2=4a+4$$

$$b^2-a^2=(a+1)^2-a^2=2a+1.$$

Cum a este un număr de două cifre,

(1) $$21\leq 2a+1\leq 199.$$

Conform enunţului, răsturnatul lui $2a+1$, trebuie să fie egal cu $4a+4$, deci divizibil prin 4, de o camdată o condiţie necesară.

Dar numerile impare de la 101 la 199, răsturnate se termină cu 1, n'ar putea fi divizibile prin 4, ceeace ne permite a restrînge inegalităţile la (1) următoarele:

(1′) $$21\leq 2a+1\leq 99.$$

De asemenea dintre numerile impare $2a+1$ ce satisfac inegalităţile (1′), vom lasa la o parte pe acelea ce incep cu o cifră impară, căci răsturnate n'ar fi divizibile prin 4; vom lasa la o parte chiar

şi pe acelea ce încep cu 4 şi 8, răsturnatele lor fiind divizibile numai cu 2, nu şi cu 4.

In felul acesta, numerile $2a+1$, care să satisfacă condiţiile (1') şi răsturnate să fi divizibile cu 4, condiţie necesară, sunt:

$2a+1$	21	23	25	27	29	61	63	65	67	69
Răsturnatul lui $2a+1$	12	32	52	72	92	16	36	56	76	96

Trebuie să alegem dintre numerile $2a+1$, astfel găsite, pe acelea care răsturnate sunt de forma,

$$4a+4=2(2a+1)+2.$$

Se vede că singurul număr ce satisface această condiţie, este

$$2a+1=25,$$

adică:

$$a=12.$$

Numerile a, b, c cerute sunt astfel:

12, 13, 14.

Soluţii date de d-nii: *Amărăşteanu F. Marcel* (lic. Lugoj), *Cazanacli V. Petre* (Chişinău), *Dăscălescu Şt. Hristache*, *Deciulescu D. Gh.* (lic. Milit., N. Filipescu), *Florescu Victor* (lic. Milit, N. Filipescu), *Herman Al. Victor* (student, Cluj), *Heroiu N. Spiridon* (lic. Milit., N. Filipescu), *Kornis Ernest* (lic. Loga, Timişoara), *Matei D. D-tru* (lic. Internat, Iaşi), *Neguiescu V. Ştefan* (lic. Milit., N. Filipescu), *Rosemberg I.* (lic. Roman), *Ştefănescu Costin* (lic. Milit., N. Filipescu), *Theodorescu N. Dorin* (lic. Milit., N. Filipescu) şi *Tilică C. Ştefan* (lic. T-Severin).

1504. — *Să se stabilească identitatea:*

$$\sum a(b^3-c^3)\cos^2\frac{A}{2}=$$

$$8pR^2(h_a+h_b+h_c)\sin\frac{A-B}{2}\sin\frac{B-C}{2}\sin\frac{C-A}{2},$$

notaţiile fiind cele obicinuite într'un triunghiu.

CEZAR IVANESCU

Insemnăm cu E_1 primul membru şi cu E_2 al 2-lea membru al identităţii cerute.

In virtutea relaţiunei cunoscute

$$\cos\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}},$$

putem scri:

$$(1)\qquad E_1=\sum a(b^3-c^3)\frac{p(p-a)}{bc}=$$

$$\frac{p}{abc}\sum a^2(b^3-c^3)(p-a)=\frac{p^2}{abc}\sum a^2(b^3-c^3)-$$

$$\frac{p}{abc}\sum a^3(b^3-c^3)=$$

$$\frac{p^2}{abc}(a^2b^3-a^2c^3+b^2c^3-b^2a^3+c^2a^3-c^2b^3)-$$

$$\frac{p}{abc}\sum(a^3b^3-a^3c^3+b^3c^3-b^3a^3+c^3a^3-c^3b^3)=$$

$$\frac{p^2}{abc}(a^2b^3-a^2c^3+b^2c^3-b^2a^3+c^2a^3-c^2b^3).$$

De asemeni, având în vedere relaţiunile cunoscute:

$$\sin\frac{A-B}{2}=\frac{b-c}{2}\cos\frac{A}{2},$$

$$\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}=\frac{p}{4R},$$

(Compléments de Trigonométrie par F. G. M., pp. 582—583), precum şi relaţia:

$$h_a+h_b+h_c=\frac{ab+bc+ca}{2R},$$

(Compléments de Trigonométrie par F.G.M., p. 598), membrul al 2-lea al identităţii cerute se poate scri succesiv:

$$(2)\qquad E_2=8pR^2\cdot\frac{ab+bc+ca}{2R}\times$$

$$\frac{(b-c)(c-a)(a-b)}{abc}\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}=$$

$$\frac{4pR}{abc}(ab+bc+ca)(b-c)(c-a)(a-b)\cdot\frac{p}{4R}=$$

$$\frac{p^2}{abc}(ab+bc+ca)(b-c)(c-a)(a-b)=$$

$$\frac{p^2}{abc}(ab+bc+ca)(ab^2-ac^2+bc^2-ba^2+ca^2-ab^2)$$

$$=\frac{p^2}{abc}(a^2b^3-a^2c^3+b^2c^3-b^2a^3+c^2a^3-c^2b^3).$$

Privind relaţiile (1) şi (2), deducem că

$$E_1=E_2,$$

deci identitatea cerută este astfel stabilită.

Soluţii date de d-nii: *Amărăşteanu F. Marcel* (bacalaureat, Craiova), *Andrunachievici Al. Vladimir* (Chişinău), *Cazanacli V. Petre* (Chişinău), *Negrea A. Leonte-Mircea* (Brăila), *Popoviciu G.*, *Ripianu Andreiu* şi *Tilică C. Ştefan* (lic. T-Severin).

1505. — *Să se afle restul împărţirii prin 1000 a expresiei :*

$$E = 243 \times 3^{12p+1} + 3^{8p+5} + 3^{4p+3} + 1000$$

ION MARGINEANU

Avem :

$$E = 3^5 . 3^{12p+1} + 3 . 3^{8p+4} + 3.3^{4p+2} + 1000 =$$

$$3^{12p+6} + 3 . 3^{8p+4} + 3 . 3^{4p+2} + 1 + 999 =$$

$$(3^{4p+2} + 1)^3 + 999.$$

Dar :

$$3^{4p+2} + 1 = 9^{2p+1} + 1 = (10 - 1)^{2p+1} + 1 =$$

$$\text{mult. } 10 + (-1)^{2p+1} + 1 = \text{mult. } 10.$$

Rezultă că putem scri :

$$E = (\text{mult. } 10)^3 + 999 = \text{mult. } 1000 + 999.$$

Deci **restul împărţirei prin 1000 a expresiei date, este 999.**

Soluţii date de d-nii : *Amărăsteanu F. Marcel* (bacalaureat, Craiova), *Florescu Victor* (lic. Milit., N. Filipescu), *Jidanu I. C-tin* (lic. Beiuş), *Lupescu Gh. Corneliu* (Şc. Of. de Artilerie), *Popoviciu I. Gavril*, *Ripianu Andrei* (lic. Braşov), *Stamate I Ionel* (lic. Lugoj), *Viciu A. Aurel* (Tg. Mureş) şi *Vişa Eugen.*

PROBLEME PROPUSE

1578. — Să se arate că expresiunea :

$$E = 1407^{4(n+1)} + 9^n \times 469^{2n+1} \times (27 \times 469^2 + 3) + 1,$$

este divizibilă prin 1936, oricare ar fi n întreg.

D-TRU D. MATEI

1579. — Să se găsească patratul perfect de patru cifre însemnătoare diferite, de forma $a\,b\,c\,d$, unde $c\,d$ este patrat perfect, divizibil prin a, b, c, d şi $a\,b = a + b + c + d$.

MARTIAN V. MURCU

1580. — Să se rezolve sistemul :

$$\begin{cases} x + y + z = 7 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 149 \\ x^3 + y^3 + z^3 = 385 \end{cases}$$

DUMITRU ŢARALUNGA

1581. — Să se afle adevărata valoare a expresiunii :

$$E = \frac{1}{\sqrt{1-a^2}} L \frac{\sqrt{1+a} + \sqrt{1-a}\,\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{\sqrt{1+a} - \sqrt{1-a}\,\operatorname{tg}\frac{x}{2}}$$

GEORGE G. ANTON

1582. — Fiind dat un cerc (O) şi un diametru A B, tangenta la cercul (O) în un punct variabil M, întâlneşte diametrul A B în C. Se cer locurile centrelor cercurilor înscrise şi circumscrise triunghiului O M C.

V. THÉBAULT

1583. — Se dă triunghiul A B C dreptunghic în A şi se duc segmentele de dreaptă $A C_1$, $B A_1$, $C B_1$ în exteriorul triunghiului şi astfel ca să avem :

$$\sphericalangle B A C_1 = \sphericalangle C B A_1 = \sphericalangle A C B_1 .$$

Ştiind că avem încă :

$$\frac{A B}{A C_1} = \frac{B C}{B A_1} = \frac{C A}{C B_1},$$

să se demonstreze că aria triunghiului $A_1 B C$ este egală cu suma ariilor triunghiurilor $B_1 C A$ şi $C_1 A B$.

V ALACI

1584. — Se dă expresia :

$$E = \frac{\cos^2 a}{(1 + \sin a)^2} + \frac{3(1 - \sin a)}{\cos a} + 2.$$

Să se exprime E cu ajutorul lui

$$x = \operatorname{tg}\left(45 - \frac{a}{2}\right)$$

şi să se arate că :

$$E(x) = (x + 1)(x + 2).$$

SUB LT D. TUTUNARU

1585. — Intr'un triunghiu oarecare avem relaţia :

$$\frac{\cos A - \sin A + \cos B - \cos C + 1}{\cos A + \sin A - \sin B + \sin C - 1} = \operatorname{cotg}\frac{A}{2}$$

L-T C. IONESCU-ŢIU

Manuscrise primite de la corespondenţii noştrii până la 10 a lunei curente şi anume: Articole (A), Note (N), probleme propuse (P) şi probleme rezolvate indicate prin numărul lor de ordine.

Amărăşteanu F. Marcel (P., 1496, 1521, 1524, 1528); *Anastasiu M. Mihail* (P., 1449, 1517, 1540); *Anastasescu M. Mihail* (1517, 1537, 1550, 1572, 1574); *Andrievici N.* (P., 1513, 1521, 1529, 1546), *Andrunachievici Al. Vladimir* (1550, 1551, 1552, 1556, 1561, 1565, 1567, 1569, 1572, 1573, 1574, 1576); *Beloiu B. D-tru* (154); *Cazanacli V. Petre* (1499, 1500, 1502, 1503, 1506, 1509); *Constantinescu C. Vasile* (1391, 1447); *Czijak Vasile* (1521, 1567); *Dăscălescu Şt. Hristache* (1471, 1476, 1477, 1480, 1485, 1487, 1488, 1491, 1521); *Deciulescu Gh.* (1420, 1471); *Diaconescu Marcel* (P., 1513, 1517, 1524, 1529, 1546); *Floareş I. Adrian* (1521); *Gloden A.* (N., P.); *Grumăzescu Mircea* (P); *Jidanu I. C-tin* (1569, 1573); *Kornis Ernest* (1556, 1560, 1569, 1570, 1573, 1574, 1576); *Milu I. Nicolae* (1539, 1411, 1441, 1433, 1448, 1484, 1488, 1524, 1537, 1540, 1544, 1555); *Nedelcu V. Nicolae* (1521); *Petre C. I.* (1529); *Popescu V. Florian* (1565, 1567, 1574); *Popescu Zorica N. Alexandru* (P.); *Rădulescu Gh. Octavian* (P.); *Ripianu Andreiu* (P., 1561, 1862, 1567, 1568, 1569, 1570, 1572, 1573, 1574, 1575, 1576); *Segal Zigu* (1552, 1570, 1573, 1574); *Staicu I. N.* (P, 1484, 1513, 1517, 1524, 1540, 1550, 1556); *Stoenescu D. Mirel* (1517, 1524, 1540); *Stoica N. Vasile* (1513, 1522); *Thébault V.* (N. P.); *Theodorescu Dorin* (1420, 1441, 1517); *Tica P. Marin* (P., 1551, 1574); *Tilică C. Ştefan* (1468, 1472, 1476, 1484, 1513, 1517, 1521, 1522, 1529, 1533, 1537, 1540); *Ţarălungă D-tru* (1517, 1519, 1520, 1523, 1524, 1535, 1537, 1540, 1544, 1549, 1552, 1553).

INFORMAŢIUNI

La Redacţiunea „Revistei Matematice din Timişoara" se primesc abonamente pentru:

BOLETIN MATEMATICO

ANUL AL X-LEA

care a început în Martie 1937.

Costul *special* a unui abonament este de 200 lei.

Această Revistă se publică în Buenos-Aires, Republica Argentina.

Pentru anul al X-lea care începe în Martie 1937, s'au primit până acum la Redacţia „R. M. T." următoarele abonamente:

1. Locotenent *Costăchescu Constantin,* Distrugătorul *„Regina Maria",* Constanţa.
2. Profesor *I. Nemet,* Casa învăţătorilor, str. Remus, Timişoara.

Răspundem pe această cale, la toţi acei corespondenţi, care se plâng că anumite probleme nu le-au fost considerate, că aceasta se datoreşte sau faptului că acele soluţiuni au sosit întârziate, sau au fost greşite, sau n'au sosit de loc.

Evident că astfel de probleme nu pot fi luate, în seamă.

Legându-se colecţia R. M. T., anul XV, în volum şi rămânând numere răzleţe care nu au putut fi legate, putem trimete corespondenţilor noştri numere care eventual le lipsesc din colecţie în schimbul sumei de 10 lei. Doritorii se vor adresa administraţiei revistei, trimiţând suma prin mandat poştal.

Rugăm călduros pe corespondenţii noştrii să facă cunoscut această REVISTĂ colegilor şi camarazilor lor.

SPHINX

Revue mensuelle des questions récréatives

FONDÉE EN 1931

REVUE UNIQUE DANS SON GENRE
dans le monde entier

ABONNEMENTS :
1 an : Belgique, **30 fr.** France, **25** fr.
Etranger, 7 **belgas**

Administration :
SPHINX, Bruxelles 75, Rue Philippe Baucq

Toţi cei ce ne trimet articole, note, probleme propuse sau rezolvate, pentru a fi luate în consideraţie, sunt obligaţi a fi abonaţi la Revista Matematică din Timişoara.

Anunţăm că nu vom mai lua în considerare problemele rezolvate, iscălite de mai mulţi corespondenţi. Fiecare corespondent trebue să-şi redacteze problema rezolvată de el, şi s'o iscălească.

Fiecare problemă rezolvată, notă sau articol trebuesc scrise pe sferturi de coale de hârtie şi însoţite de enunţ. Problemele propuse trebuesc însoţite şi de soluţiile lor.

Fiecare problemă rezolvată trebuie să fie scrisă aparte şi să nu se continue cu alte probleme, căci nu se pot repartiza la numerile corespunzătoare deci nu pot fi luate în seamă.

ANUL XVII. 15 IUNIE 1937 No. 4.

REVISTA MATEMATICĂ

DIN

TIMIȘOARA

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA APARE ODATA PE LUNA.

PREȚUL UNUI NUMAR 12 LEI PREȚUL ABONAMENTULUI 100 LEI PE AN.

CUPRINSUL

1. GH. CONSTANTINESCU: PATRATE SUDATE.
3. NOTE MATEMATICE: 8, 9.
4. BIBLIOGRAFIE.
5. PROBLEME REZOLVATE: 1513, 1517, 1519, 1520, 1521.
6. PROBLEME PROPUSE: 1586-1593.
7. INFORMATIUNI.

TIMISOARA

Institut de Arte grafice Tipografia Românească

„Orice profesor de matematici, din orice colţ al ţării şi de la orice şcoală, trebuie să fie apostol al specialităţii sale. Din felul cald şi luminos cum îşi face lecţiile, din drumul drept şi demn pe care îl urmează în viaţă, trebuie să apară limpede că judecata matematică precisă şi sigură, curată ca cristalul, are o înaltă şi admirabilă valoare educativă pentru viaţă.

Adevărul curat, adevărul drept, adevărul luminos, să fie îndreptarul vieţei noastre. Aceasta să fie contribuţia specialităţii noastre la îndrumarea neamului românesc, pe calea care-i stă deschisă".

G. ŢIŢEICA

Manuscrisele destinate Revistei Matematice din Timişoara conţinând soluţiunile problemelor propuse şi probleme, note sau articole originale vor fi trimise pe adresa: **V. Alaci,** profesor Şcoala Politechnică, Timişoara.

Plata abonamentului precum şi reclamaţiunile de neprimirea Revistei vor fi adresate d-lui **Prof. C. Teodorescu,** Rectorul Şcoalei Politechnice din Timişoara.

Plata abonamentului se face prin CEC (Casa de economii şi cecuri postale. unde revista are contul CEC No. 85208, sau prin mandat postal adresat d-lui Prof. C. TEODORESCU, Rectorul Şcoalei Politechnice din Timişoara.

Taxa de Membru în „Comitetul de Conducere al Revistei Matematice din Timişoara" este pentru anul XVII, de 200 (două sute) lei.

Colecţia R. M. T., se găseşte la Administraţia Revistei, şi se poate procura în schimbul preţului:

Anul I, epuizat. Anii: II—XVI inclusiv, broşate, 120 lei fiecare.

ANUL XVII — NO. 4. TIMISOARA, 15 IUNIE 1937

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA

APARE LA 15 A FIECAREI LUNI

PREȚUL UNUI NUMAR . . . . . 12 LEI
ABONAMENT ANUAL . . . . . 100 LEI
Abonamentele sunt socotite totdeauna dela 15 Martie

REDACȚIA: Prof. V. ALACI
Școala Politechnică din Timișoara.
ADMINISTRAȚIA: Prof. C. TEODORESCU
Rectorul Școalei Politechnice din Timișoara.

PATRATE SUDATE

DE PROF. GH. CONSTANTINESCU

Patratele perfecte, prezintă diferite particularități cari, dau naștere la multe probleme de teoria numerilor.

In cele ce urmează voiu arăta unele din aceste particularități:

1. Sunt patrate perfecte compuse din sudura a două patrate ca în exemplele următoare:

$1442401 = 1201^2$ $144 = 12^2$ $2401 = 49^2$
$1692601 = 1301^2$ unde, $169 = 13^2$ și $2601 = 51^2$
$5769604 = 2402^2$ $576 = 24^2$ $9604 = 98^2$

și iată și un exemp'u mai mare, de 40 cifre

$$2499999999000000000199999999980000000001 = 5999999999000000000l^2$$

unde

$$249999999900000C0001 = 4999999999^2$$

$$9999999998S0000000001 = 9999999999^2.$$

Primele trei exemple sunt soluțiuni la prima parte din problema 4301 din G. M. propusă de d-l Profesor *M. Ghermănescu* și nepublicată.

2. Sunt alte patrate perfecte compuse din sudura unui patrat perfect cu o putere oarecare a altui număr, cum se vede din următoarele exemple:

$$399029709129984256 = 631687884^2$$

$$1.136.299.445.139.681.729. = 1.065.973.473^2$$

$$1.32490333805625625 = 987012475^2$$

unde

$399029709129984 = 20975728^2$ și $256 = 2^8$
$1.136.299445139681 = 33709041^2$ și $729 = 3^6$
$1.324.90333805625 = 31221075^2$ și $625 = 5^4$.

3. In fine sunt alte patrate perfecte compuse din sudura unui număr cu el însuși, ca în exemplu următor:

$$82644128100826441281 = 90.909.090.91^2.$$

Modul cum se găsesc aceste patrate l'am desvoltat în R. M. T. anul XV. și acum voiu arăta că sunt puteri ale unui număr compuse din sudura unei puteri oare-care a altui număr cu el însuși, după cum vedem în exemplu următor:

$$\left(\frac{10^{121}+1}{1331}\right)^2 10^{121} + \left(\frac{10^{121}+1}{1331}\right)^2 = 11^3 . \left(\frac{10^{121}+1}{1331}\right)^2$$

Toate aceste patrate și puteri le vom numi patrate și puteri sudate și în cele ce urmează vom arăta în mod amănunțit cum se găsesc aceste numere.

I. Insemnăm cu y^2 și z^2 două patrate, cari scrise unul după altul, ne dau patratul x^2, și dacă numărul z^2 este de n cifre vom avea relațiunea:

$$10^n y^2 + z^2 = x^2.$$

Soluțiunile acestei ecuațiuni se găsesc în mod diferit după cum n este par sau impar.

In cazul când n este par ecuațiunea:

$$10^{2n} y^2 + z^2 = x^2$$

este o ecuațiune pytagorică și soluțiunile ei sunt:

$$2pg = 10^n y$$
$$p^2 - g^2 = z$$
$$p^2 + g^2 = x$$

cu condițiunea ca din aceste soluțiuni să găsim și altele prin înmulțirea lor cu un număr d, astfel ca să avem $dz < 10^n$. Dela început excludem soluțiunile unde z este un multiplu de 10, pentrucă acestea sunt soluțiuni cari corespund pentru un n mai mic.

Din egalitatea $2pg = 10^n y$, putem lua pentru p şi g următoarele valori

$$p = 2^\alpha 5^\beta K$$
$$q = 2^{n-\alpha-1} 5^{n-\beta} K'$$

şi cum am exclus valorile lui z cari sunt un multiplu de 10, urmează că p şi g nu pot fi decât de următoarele forme.

(1) $p = 2^\alpha 5^n K$ şi $q = 2^{n-\alpha-1} K'$

(2) $qp = 2^{n-1} 5^\beta K$ şi $q = 5^{n-\beta} K'$.

Putem deasemenea schimba valorile lui p şi q între ele.

Valorile acestea ale lui p şi q dau soluţiunile pentru x, y şi z şi cum z trebue să fie mai mic ca 10^n, ar trebui ca

$$p^2 - g^2 = z < 10^n.$$

Această condiţiune îngreunează mult aflarea soluţiunilor în cazul când n este mai mare şi deaceea voiu modifica puţin mersul problemei, lăsând pentru p tot valorile de mai sus, iar pentru g, care este mai mic ca p, îl voi pune sub forma $g = p - K$ urmând a determina pe K şi K' astfel ca să avem:

$$2pg = 10^n y.$$

Să luăm pe rând toate formele pe cari le-ar putea lua p.

(1) $p = 2^\alpha 5^n K$ şi $g = 2^\alpha 5^n K - K'$.

Produsul $pq = 2^{n-1} 5^n y$, ne arată că q trebue să fie un multiplu de $2^{n-\alpha-1}$ şi deci K' trebue să îndeplinească anumite condiţiuni:

Vom deosebi două cazuri, după cum α este mai mare sau mai mic decât $E\left(\frac{n-1}{2}\right)$, simbolul E însemnând numărul întregilor cuprinşi în expresiunea din paranteză.

a. In cazul când $\alpha \geqq E\left(\frac{n-1}{2}\right)$, trebue că K' să fie de forma $K' = 2^{n-\alpha-1} K_1'$ căci numai în acest caz produsul pg va fi divizibil cu $2^{n-1} 5^n$.

Valoarea lui q va fi în acest caz

$$q = 2^\alpha 5^n K - 2^{n-\alpha-1} K_1'$$

şi valoarea corespunzătoare a lui z va fi:

$$z = 10^n K K_1' - 2^{2n-2\alpha-2} K_1^2 < 10^n.$$

Ca această inegalitate să fie satisfăcută, trebue ca

$$K K_1' = 1 \quad \text{deci} \quad K = 1 \quad \text{şi} \quad K_1' = 1$$

şi deci formulele

$$z = 10^n - 2^{2n-2\alpha-2}$$
$$y = 2^{2\alpha+1-n} 5^n - 1$$
$$x = 2^{2\alpha+1} 5^{2n} - 10^n + 2^{2n-2\alpha-2},$$

dau toate soluţiunile în cazul când dăm lui α valori cari să satisfacă inegalitatea $\alpha \geqq E\left(\frac{n-1}{2}\right)$.

Deoarece am spus că putem schimba între ele valorile lui p şi g, ar trebui în acest caz să avem:

$$p = 2^\alpha 5^n K + K' \quad \text{şi} \quad q = 2^\alpha 5^n K,$$

dar aceste valori ale lui p şi q nu satisfac inegalitatea $z < 10^n$, când $\alpha \geqq E\left(\frac{n-1}{2}\right)$, căci din valoarea lui

$$z = p^2 - q^2 = 10^n K K_1' + 2^{2n-2\alpha-2}$$

se vede cum că oricare ar fi K şi K_1, avem pentru z o valoare mai mare ca 10^n.

2. In cazul când $\alpha < E\left(\frac{n-1}{2}\right)$, numărul K' nu poate fi decât de forma $K' = 2^\alpha K_1'$, pentru că dacă ar fi un multiplu de o putere mai mare sau mică a lui 2, atunci q nu ar putea fi divizibil cu $2^{n-\alpha-1}$ care este mai mare ca 2^α. In acest caz vom avea

$$p = 2^\alpha 5^n K \quad \text{şi} \quad q = 2^\alpha 5^n K - 2^\alpha K_1',$$

unde trebue să determinăm pe K şi K_1' astfel ca expresiunea

$$5^n K - K',$$

să fie divizibilă cu $2^{n-2\alpha-1}$. Determinarea lui K şi K_1' se face uşor după cum se va vedea în exemplu cel vom da la sfârşit, pentru că K şi K_1' nu sunt arbitrare, ci trebue să îndeplinească anumite condiţiuni:

In adevăr din valoarea lui z

$$z = 2^{2\alpha+1} 5^n K K' - 2^{2\alpha} K_1'^2,$$

se vede că $K K' \leq 2^{n-2\alpha-1}$ şi deci valorile lor sunt limitate.

Schimbând valorile lui p şi q unele cu altele vom avea:

$$p = 2^{\alpha} 5^{n} K + 2^{\alpha} K_1' \text{ şi } q = 2^{\alpha} 5^{n} K$$

şi trebue determinat K şi K_1' în aşa mod ca expresiunea:

$$5^{n} K + K_1'$$

să fie divizibilă cu $2^{n-2\alpha-1}$ şi $K K_1' < 2^{n-2\alpha-1}$.

2. $p = 2^{n-1} 5^{\beta} K$ şi $q = 2^{n-1} 5^{\beta} K - K_1'$.

In acelaş mod dovedim că dacă $\beta \geq E\left(\frac{n}{2}\right)$, K' trebue să fie de forma $K' = 5^{n-\beta} K_1'$ şi formulele:

$$z = 10^{n} - 5^{2n-2\beta}$$
$$y = 2^{n-1} 5^{2\beta-n} - 1$$
$$x = 2^{2n-1} 5^{2\beta} - 10^{n} + 5^{2n-2\beta},$$

dau soluţiunile problemei pentru $\beta \geq E\left(\frac{n}{2}\right)$ oricare ar fi n iar în cazul când $\beta < E\left(\frac{n}{2}\right)$, K' trebue să fie de forma $K' = 5^{\beta} K_1'$, unde $K K_1' < 5^{n-2\beta}$ şi K şi K_1' să fie astfel determinaţi, ca expresiunea $2^{n-1} K - K_1'$ să fie divizibilă cu $5^{n-2\beta}$. In acest ultim caz putem schimba expresiunile lui p şi q una cu alta şi astfel vom avea:

$$p = 2^{n-1} 5^{\beta} K + 5^{\beta} K_1' \text{ şi } q = 2^{n-1} 5^{\beta} K$$

şi trebue determinat K şi K_1' astfel ca

$$2^{n-1} K + K_1'$$

să fie divizibilă cu $5^{n-2\beta}$.

In modul acesta se găsesc toate soluţiunile şi ca să se înţeleagă mai bine cum determinăm pe K şi K_1', vom face o aplicaţie, găsind toate soluţiunile, când patratul z^2 este de 10 cifre. Valorile lui p şi q sunt date de

$$p \cdot q = 2^4 \cdot 5^5 \cdot y_5$$
$$p^2 - q^2 = z < 10^5$$
$$p^2 + q^2 = x.$$

1. Pentru $\alpha = 4, 3, 2$ şi $\beta = 4, 3$, formulele dela (1) şi (2) dau imediat 5 soluţiuni:

$$2499900019999800001 = 4999900001^2$$
$$1561250019999800016 = 1249900004^2$$
$$97593769996800256 = 312400016^2$$
$$39960019995000625 = 199900025^2$$
$$62419995390625 = 7900625^2$$

unde:

$$2499900001 = 49999^2 \qquad 9999800001 = 99999^2$$
$$156125001 = 12499^2 \qquad 9999800016 = 99996^2$$
$$9759376 = 3124^2 \qquad 999680256 = 99984^2$$
$$3996001 = 1999^2 \qquad 9995000625 = 99975^2$$
$$6241 = 79^2 \qquad 9995390625 = 99375^2$$

2. Pentru $\alpha = 1$ avem

$$p = 2 \cdot 5^5 K \quad q = 2 \cdot 5^5 K - 2 K'$$

şi valoarea lui z va fi

$$z = 2^3 5^5 K K' - 4 K'^2,$$

din care se deduce că $K K' \leq 4$.

In acest caz trebue să avem:

$$3125 K - K' = 4 u,$$

din care deducem $u = 781 K + \frac{K - K'}{4}$, deci u va fi întreg pentru $K = K' = 1$ şi $K = K' = 2$.

Soluţia pentru $K = K' = 2$ a fost găsită când am luat $\alpha = 2$.

Astfel ne mai rămâne o singură soluţie:

$$6099610624800016 = 78100004^2$$

unde:

$$609961 = 781^2 \quad 62480016 = 24996^2.$$

Deoarece $z = 24996$, din această soluţie mai putem găsi încă trei, soluţiuni înmulţind pe aceasta cu 4, 9 şi 16.

$$2439844 \cdot 24992000061 = 156200008^2$$
$$5489649 \cdot 5623200144 = 23430012^2$$
$$9759376 \cdot 9996800256 = 624800032^2.$$

Dacă schimbăm valorile lui p şi q între ele trebue să luăm

$$p = 25^5 K + 2 K' \text{ şi } q = 2 \cdot 5^5 K,$$

găsim pentru $z = 2^3 5^5 K K' + 4 K'^2$ şi deci $K K' < 4$

Punem condiţiunea ca

$$3125 K + K' = 4 u,$$

din care deducem:

$$u = 781 K + \frac{K + K'}{4},$$

care va fi întreagă pentru $K = 1$ şi $K' = 3$, sau $K = 3$ şi $K = 1$.

Pentru aceste valori ale lui K şi K' corespund următoarele două soluţiuni:

$$611524561630401296 = 78200036^2$$
$$4944900245625600016 = 703200004^2,$$

unde:

$$611524 = 782^2 \quad 5630401296 = 75036^2$$
$$494490024 = 7032^2 \quad 5625600016 = 75004^2.$$

2. Pentru $\alpha = 0$, valorile lui p şi q sunt:

$$p = 5^5 K \text{ şi } q = 5^5 K - K',$$

iar pentru z avem

$$z = 2.5^5 K K' - K'^2,$$

din care se deduce că $K K' \leq 16$.

In acest caz trebue să avem

$$5^5 K - K' = 16u, \text{ sau } u = 195 K + \frac{5K - K'}{16},$$

care dă valori întregi pentru u luând

$$\begin{matrix} K = 1 \\ K' = 5 \end{matrix} \text{ şi } \begin{matrix} K = 13 \\ K' = 1. \end{matrix}$$

Pentru aceste valori ale lui K şi K' avem următoarele două soluţiuni:

$$38025975000625 = 19500025^2$$
$$1089462049 . 6601402001 = 3300700001^2,$$

unde:

$$38025 = 195^2, \quad 975000625 = 31225^2$$
$$1089462049 = 33007^2, \quad 6601402001 = 81249^2.$$

Mai găsim o altă soluţiune dacă pe prima o înmulţim cu 9.

$$342233775005625 = 58500075^2.$$

Luăm acum pentru p şi q următoarele forme:

$$p = 5^5 K + K' \text{ şi } q = 5^5 K.$$

Din valoarea lui $z = 2.5^K K K' + K'^2$ găsim că $K K' < 16$ şi din condiţiunea $5^5 K + K' = 16u$ găsim:

$$u = 195 K + \frac{5K + K'}{16},$$

care dă valori întregi pentru u, numai când avem

1. $K = 1 \quad K' = 11$
2. $K = 2 \quad K' = 6$
3. $K = 3 \quad K' = 1$
4. $K = 6 \quad K' = 2.$

Valorile perechi ale lui K şi K' dau soluţiuni cari au fost găsite la cazul când $\alpha = 1$, iar pentru celelalte valori corespund următoarele două soluţiuni:

$$384164743213841 = 19600121^2$$
$$30905640164090001 = 175800001^1$$

unde:

$$38416 = 196^2, \quad 4743213841 = 68871^2$$
$$3090564 = 1758^2, \quad 164090001 = 17751^2.$$

Ultima din aceste două soluţii mai dă alte 4 soluţiuni cari se obţin, din această înmulţită respectiv cu 4, 9, 16 şi 25.

$$123622560656340004 = 351600002^2$$
$$278150761476810009 = 527400003^2$$
$$247245121312720016 = 703200004^2$$
$$772641004102250025 = 87900005^2.$$

4. $\beta = 2$. Valorile lui p şi q sunt

$$p = 2^4 5^2 K \quad \text{şi} \quad q = 2^4 5^2 K - 5^2 K',$$

din care rezultă,

$$z = 2^5 5^4 K K' - 5^4 K'^2.$$

Trebue ca $K K' \leq 5$ şi

$$2^4 K - K' = 5u,$$

din care deducem:

$$u = 3K + \frac{K - K'}{5}$$

şi deci numai pentru $K = K' = 1$ avem o soluţie

$$90374390625 = 300625^2$$

unde

$$9 = 3^2 \text{ şi } 374390625 = 19375^2.$$

Inmulţim această soluţie cu 9 şi 25 mai găsim încă două soluţiuni:

$$813369515725 = 901875^2$$
$$2259359765625 = 1503125^2.$$

Inversăm acum valorile lui p şi q şi punem,

$$p = 2^4 5^2 K + 5^2 K' \text{ şi } q = 2^4 5^2 K.$$

Din valoarea lui

$$z = 2^5 5^4 K K' + 5^4 K'^2,$$

deducem că $K K' < 5$. Din condiţiunea

$$2^4 K + K' = 5u,$$

găsim

$$u = 3K + \frac{K + K'}{5},$$

care va fi întreagă pentru

1. $K = 1$ şi $K' = 4$
2. $K = 4$ şi $K' = 1$.

Numai pentru $K = 4$ şi $K' = 1$ găsim o soluţie, căci soluţia pentru $K = 1$ şi $K' = 4$ ne dă pentru z un multiplu de zece.

Soluţia corespunzătoare este:

$$27016500390625 = 5200625^2,$$

unde

$$2704 = 52^2 \quad \text{şi} \quad 6500390625 = 80625^2.$$

5. $\beta = 1$. Valorile lui p şi q sunt:

$$p = 2^4 . 5K \quad \text{şi} \quad q = 2^4 . 5K - 5K'$$

şi din valoarea lui

$$z = 2^5 . 5^2 K K' - 25 K'^2,$$

se deduce că

$$K K' < 125,$$

iar din condiţiunea

$$16K - K' = 125u,$$

găsim

$$K = 7u + \frac{13u + K'}{16},$$

care nu este întreagă decât pentru:

$$K = 8 \quad \text{şi} \quad K' = 3$$

şi căreia îi corespunde soluţiunea

$$640360050625 + 800225^2$$

unde

$$64 = 8^2, \quad 360050625 = 18975^2.$$

Inmulţim această soluţie cu 9 şi 25 şi mai găsim încă două soluţiuni:

$$5763240455625 = 2400675^2$$

$$16009001265625 = 40001125^2.$$

Schimbăm valorile lui p şi q şi luăm

$$p = 2^4 . 5 . K + 5K' \quad \text{şi} \quad q = 2^4 5 . K,$$

iar pentru

$$z = 2^5 . 5^2 . K . K' + 5^2 . K'^2$$

din care se deduce că $K K' < 125$.

Din condiţiunea

$$16K + K' = 125u$$

găsim

$$K = 7u + \frac{13u - K'}{16},$$

care nu poate fi întreagă decât pentru

1. $K = 7$ şi $K' = 13$
2. $K = 39$ şi $K' = 1$,

pentru care corespunde o singură soluţie

$$495932850625 = 704225^2$$

unde

$$49 = 7^2 \quad 5932850625 = 77025^2.$$

Dăm soluţiile găsite pentru

$$n = 8, \quad 6, \quad 4, \quad 2.$$

Patrate sudate pentru $n = 8$.

1. 24990001999800 01=4999 0001², 24990001=4999², 99980006=9999²
2. 15600199920016=12490004², 15600001=1249², 99920016=9996²
3. 97344249600 6=3120004², 97344=312², 24960016=4996²
4. 38937699840064=6240008², 389376=624², 99840064=9992²
5. 9796925040016=3130004², 97969=313², 25040064=5004²
6. 60840150600 1=780001², 6084=78², 1560001=1249²
7. 2433606240004=1560002², 24336=156², 6240004=2498²
8. 54756140 40009=2340003², 54756=234², 14040009=3747²
9. 15210039000025=3900005², 152100=390², 39000025=6245²
10. 624177422401=790049², 6241=79², 77422401=8799²
11. 1466124176580001=38290001², 14661241=3829², 76580001=8751²
12. 3960199500625=1990025², 39601=199², 99500625=9975²
13. 4987890625=70625², 49=7², 87890625=9375²
14. 1612780625=41225², 16=4², 12780625=3575²
15. 2371677000625=1540025², 23716=154², 77000625=8775²
16. 901500625=30025², 9=3², 1500625=1225²
17. 8113505625=90075², 81=9², 13005625=3675²
18. 22537515625=150125², 225=15², 37515625=6125²

pentru $n = 6$.

1. 249001998001=499001², 249001=499², 998001=999²
2. 15376992016=124004², 15376=124², 992016=996²
3. 961062001=31001², 961=31², 620001=249²
4. 3844248004=62002², 3844=62², 248004=498²
5. 8649558009=93003², 8649=93², 558009=747²
6. 1024576081=32009², 1024=32², 576081=759²
7. 79524564001=282009², 79524=282², 564001=751²
8. 4950625=2225², 4=2², 950625=975²
9. 144600625=12025², 154=12², 600625=775²

10. $1050625=1025^2$, $1=1^2$, $50625=225^2$
11. $9455625=3075^2$, $9=3^2$, $455625=675^2$

pentru $n=4$.

1. $1442401=1201^2$, unde $144=12^2$, $2401=49^2$
2. $1692601=1301^2$ $169=13^2$, $2601=51^2$
3. $5769604=2402^2$ $576=24^2$, $9604=98^2$
4. $24019801=4901^2$ $2401=49^2$, $9801=99^2$
5. $93025=305^2$ $9=3^2$, $3025=55^2$
6. $42025=205^2$ $4=2^2$, $2025=45^2$
7. $15625=125^2$ $1=1^2$, $5625=75^2$

Pentru $n=2$ avem un singur patrat sudat $1681=41^2$.

2. Patratele sudate, când ultimul patrat este de un număr impar de cifre, se reduc la rezolvarea ecuațiunei:

$$x^2-10^{2n+1}y^2=z^2$$

unde

$$z<10^{\frac{2n+1}{2}}.$$

Rezolvarea acestei ecuațiuni se face cum am arătat la patratele berce și în cele ce urmează voiu da soluțiunile pentru $n=1$ și $n=3$.

Pentru $n=0$, z ia numai valorile $z=1$, 2, 3 la cari corespund următoarele soluțiuni:

$z=1$

$x=1,\ 19,\ 721\ \ldots.$
$y=0,\ 6,\ 228\ \ldots.$

$z=4$

$x=2,\ 36,\ 1442\ \ldots.$
$y=0,\ 12,\ 456\ \ldots.$

Pentru $z=3$ corespund pentru x și y trei șiruri de soluțiuni:

(1) $x=3,\ 57\ 2163\ \ldots.$
$y=0,\ 48\ 684\ \ldots.$

(2) $x=7,\ 253\ 9607\ \ldots.$
$y=2,\ 80\ 3038\ \ldots.$

(3) $x=13,\ 487\ 18493\ \ldots.$
$y=4,\ 154\ 5848\ \ldots.$

Pentru $n=1$, z ia toate valorile dela 1 până la 31 inclusiv, din care excludem valorile $z=10$, 20, 30 pentru'că se reduc la cazul când $n=0$.

Dacă insămnăm cu u_i, v_i o soluție generală a ecuației

$$u^2-1000v^2=1,$$

unde

$$u_1=39480499,\qquad v_1=1248483,$$

rezultă că o serie de soluțiuni a ecuației $x^2-1000y^2=z^2$, va fi $x=u_i z$, $y=v_i z$, unde z va lua toate valorile dela 1 până la 31.

Pe lângă aceste ecuațiuni, ecuațiunea mai are alte șiruri de soluțiuni. Dăm numai soluțiunile reduse, care cu ajutorul lui u_i și v_i dau șirul întreg de soluțiuni.

Pentru $z=3$, 5, 6, 12, 13, 21, 24, 26, 31 corespund numai câte un șir de soluțiuni:

z	x	y	z	x	y
3	253	8	21	1771	56
5	95	3	24	2024	64
6	506	16	26	60526	1914
12	1012	32	31	7969	252
13	30263	957			

Pentru $z=9$, 18, 25, 27 corespund câte două șiruri de soluțiuni

z	x	y	x	y
9	759	24	128009	4048
18	1518	48	256018	8096
25	475	15	18025	570

Pentru $z=27$ avem trei șiruri de soluțiuni:

z	x	y	x	y	x	y
27	2277	72	384027	12144	64770277	2048216

Pentru $z=15$ avem patru șiruri de soluții

z	x	y	x	y	x	y	x	y
15	1265	40	285	9	40035	1519	35	1

II. Patrate compuse din sudura unui alt patrat cu o putere oarecare a altui număr se găsesc ușor din soluțiile găsite la patratele berce, sau sudate cu condițiunea ca $z^k<10^n$.

Fie x, y și z, o soluție a ecuației

$$x^2-10^n y^2=z,\quad \text{unde}\quad z_1^k<10^n.$$

Din egalitatea:

$$(x_1^2-10^n y_1^2)^2=(x_1^2+10^n y_1^2)^2-10^n(2x_1y_1)^2=z_1^2,$$

avem o soluție:

$$x_2=x_1^2+10^n y_1^2$$
$$y_2=2x_1y_1$$
$$z_2=z_1^2,$$

care reprezintă un patrat sudat, apoi din egalitatea

$$(x_1^2-10^n y_1^2)(x_2^2-10^n y_2^2)=$$
$$(x_1x_2\pm 10^n y_1y_2)^2-10^n(x_1y_2\pm y_1x_2)^2=z_1^3.$$

deducem că:

$$x_3 = x_1 x_2 \pm 10^n y_1 y_1$$
$$y_3 = x_1 y_2 \pm y_1 x_2$$
$$z_3 = z_1^3,$$

ne dă un patrat care provine din sudura unui patrat cu puterea a 3-a a unui alt număr. Continuând tot aşa, găsim patrate perfecte compuse din sudura unui patrat cu o putere oarecare a unui alt număr.

Un exemplu. Ecuaţia $x^2 - 1\,000\,y^2 = 9$ are ca soluţie

$$x_1 = 253, \qquad y_1 = 8.$$

Din identitatea

$$(x_1^2 - 1000\,y_1^2) = (x_1^2 + 1000\,y_1^2)^2 - 1000\,(2\,x_1\,y_1)^2 = 9^2$$

rezultă că

$$x_2 = 128009, \qquad y_2 = 4048, \qquad z_2 = 34,$$

dă soluţia unui patrat perfect compus din sudura patratului 4048^2 şi puterea a patra a lui 3, având între ele un zero, iar din identitatea

$$(x_2^2 - 1000\,y_2)\,(x_1^2 - 1000\,y_1^2) =$$
$$(x_1\,x_2 \pm 1000\,y_1\,y_2)^2 - 1000\,(x_1\,y_2 \pm y_1\,x_2)^2 = 729,$$

găsim că

$$x_3 = 64770277 \qquad x_n = 2277$$
$$y_3 = 1048216 \qquad y_n = 72$$
$$z = 3^6 \qquad z_n = 3^6,$$

deci avem două patrate perfecte compuse din sudura unui patrat cu puterea a şasea a lui 3.

III. Numărul a^k având n cifre, rezultă că acest număr scris unul după altul de două ori, ne va da un număr care se poate scrie sub forma

$$a^k\,(10^n + 1)$$

şi dacă punem conditiunea ca acest nou număr să fie puterea $k+1$ a unui alt număr vom avea:

$$a^k\,(10^n + 1) = u^{k+1}.$$

Punem pe $u = ap$ şi ecuaţia se reduce la:

$$10^n + 1 = a\,p^{k+1},$$

care se reduce la găsirea divizorilor puterei $k+1$, ai numărului $10^n + 1$.

In R. M. T., anul XV, pag. 137, cu ocazia soluţiei problemei No. 445, am arătat ce fel de numere prime sunt divizorii numărul $10^n + 1$ şi dacă n_1 este numărul cel mai mic al lui n, astfel ca numărul $10^{n_1} + 1$ să se împartă cu p, atunci $10\,p^k n_1 + 1$ se va împărţi cu p^{k+1} şi deci

$$\frac{10\,p^k n_1 + 1}{p^k + 1} = a$$

şi astfel se găsesc puteri formate din sudura a unei puteri a unui număr cu el însuşi.

NOTE MATEMATICE

8. — *Notă asupră problemei 1457.*

Soluţia publicată la pag. 32 din No. 3 al acestei reviste, sugerează unele observaţiuni.

1°. Soluţia problemei se deduce direct din ecuaţia (3) de la pag. 33, fără a o rezolva. In adevăr se cere rezolvarea în numere întregi a ecuaţiei

$$k(k-1)\,a^2 - 4\,k\,a - (k-2) = 0.$$

Se vede că, pentru numere întregi, k trebuie să dividă pe $k-2$, deci k trebue să fie 1 sau 2, de unde se deduce numai soluţia găsită la pag. 33

$$k = 2, \qquad a = 2 \qquad \text{şi} \qquad B = 7.$$

2°. S-a examinat cazul $a = b+1 > b$. Se poate examina la fel şi cazul $a = b-1 < b$. Pentru acest caz ecuaţiile (2) devin

$$B + 1 = k\,a \qquad \text{şi} \qquad B^2 + 1 = k\,(a-1)^2$$
$$\ast\ast\ast \qquad (k\,a - 1)^2 + 1 = k\,(a-1)^2$$
$$\ast\ast\ast \qquad k = 2,$$

care dă $B = 1$, ce nu are senz

3°. $k^2 + k + 2$ este patrat perfect pentru $k=1$. Se pot examina soluţiile întregi ale ecuaţiei

$$k^2 + k + 2 = m^2,$$

după metodele clasice sau după metodele date de d-l *Gh. Constantinescu* în articolele sale din Vol. XVI, pag. 4 şi 17.

4°. Se poate rezolva la fel problema mai generală, când diferenţele $a - b$ sau $b - a$ au o anume valoare n. Procedând că la problema 1457 se ajunge la

$$\frac{a}{(a-n)^2} = \frac{B+1}{B^2+1}$$

sau

$$\frac{a}{(a+n)^2} = \frac{B+1}{B^2+1}.$$

5. — Probleme analoage a mai propus D-l *V. Thébault.* A se vedea de exemplu problema 2895 rezolvată la pag. 106, Vol. L, din *Mathesis*, unde se cere ca

$$a\,a\,b\,b = (c\,c)^2,$$

a, b, c fiind consecutive şi problema 4604 rezolvată la pag. 48, Vol. XLII din *Gazeta Matematică* unde se cere ca

$$a\,a\,b\,b = (c\,c)^2,$$

a, b, c fiind de parităţi consecutive.

G L Gh. Buicliu

9. — *Asupra problemei 335.*

In această problemă, propusă de d-l Lt-Comandor *Gr. Zapan*, se cerea locul proecţiunilor unui punct fix P, din spaţiu, pe dreptele ce se rotesc în jurul unui alt punct fix A, din spaţiu.

In soluţia dată acestei probleme (vol. XVI, pag. 70) se ajunge la concluzia că locul nu există, întrucât numărul parametrilor variabili este superior celui al ecuaţiilor cu ajutorul cărora s'ar putea determina acel loc, dacă ar exista.

Această concluzie este valabilă numai dacă luăm noţiunea de loc geometric în sensul restrâns de a fi o linie sau o suprafaţă fixă. In sensul mai larg, locul poate fi însă alcătuit dintr'o infinitate de suprafeţe sau linii, cari umplu o întreagă regiune a spaţiului, după cum vom vedea că este cazul în problema de mai sus.

In adevăr, dreptele ce se rotesc în jurul punctului O din spaţiu, rămânând la o distanţă R de O, sunt tangente la o sferă S, de rază R şi având centrul în O. Se ştie că ele aparţin unui *complex* patratic, dar aceasta în treacât, neavând legătură cu cele ce urmează.

Voiu arăta că orice punct M, situat într'o anumită regiune D din spaţiu, face parte din loc, cu alte cuvinte, poate fi proecţia punctului fix P pe o tangentă la sfera S. Fie, în adevăr, M T o tangentă la sfera S, perpendiculară pe M P. Ea se găseşte evident în planul perpendicular pe M P, dus prin M, care, tăind sfera S după un cerc, ne va da pentru M T două tangente duse din M la acest cerc, care sunt tangente şi la sferă, după cum uşor se constată cu ajutorul teoremei celor trei perpendiculare.

Pentruca tangenta M T să existe, trebue ca punctul M să fie exterior sau situat pe sfera S, iar planul dus prin M să întâlnească sfera, adică distanţa dela centrul O al sferei la acest plan să fie mai mică sau cel mult egală cu raza sferei.

Ori, dacă α, β, γ sunt coordonatele punctului M, iar *a, b, c* ale punctului fix, faţă de nişte axe rectangulare cu originea în O, ecuaţia planului perpendicular în M pe M P va fi

$$(\alpha - a)(x - \alpha) + (\beta - b)(y - \beta) + (\gamma - c)(z - \gamma) = 0.$$

Scriind că patratul distanţei dela origină la acest plan, este mai mic sau cel mult egal cu patratul razei sferei S, vom obţine

$$\frac{[\alpha(\alpha - a) + \beta(\beta - b) + \gamma(\gamma - c)]^2}{(\alpha - a)^2 + (\beta - b)^2 + (\gamma - c)^2} \leq R^2,$$

sau

$$(1) \qquad [\Sigma\,\alpha(\alpha - a)]^2 - R^2\,\Sigma(\alpha - a)^2 \leq 0,$$

ceia ce arată că *punctul* $M(\alpha, \beta, \gamma)$ *se află în regiunea din spaţiu neinterioară sferei S, dar neexterioară suprafeţei fixe*

$$(2) \qquad [\Sigma\,x(x - a)]^2 - R^2\,\Sigma(x - a)^2 = 0,$$

care, se constată uşor, este tocmai *podara* punctului $P(a, b, c)$ faţă de sfera S, adică locul proecţiunilor punctului P pe planele tangente sferei S.

Acest rezultat se putea deduce de altfel în mod intuitiv astfel: planul dus prin M, perpendicular pe M T, este situat între punctul P şi planul tangent sferei S, perpendicular pe M T, în M'. Când acest plan tangent variază, M' descrie *podara* de mai sus, iar M va rămâne astfel în interiorul sau cel mult pe această suprafaţă.

Se vede că orice punct M' al podarei este un punct al locului, căci prin el trece un plan tangent la sferă, perpendicular pe dreapta M' P, în care plan se găseşte o tangentă M' T la sferă, perpendiculară pe M' P, T fiind punctul de contact al planului tangent cu sfera S.

De asemeni, pe sfera S se găsesc numai două puncte ale locului geometric, anume intersecţiile cu diametrul ce trece prin P.

Problema oferă astfel un interesant exemplu de proprietate *topologică* a unei regiuni a spaţiului.

M GHERMANESCU

BIBLIOGRAFIE

1. *Gazeta Matematică*, anul XLII, No. 9, Mai 1937. Două aritmetici vechi anonime, de *Victor Marian*. Cercuri asociate unui triunghiu, de *V. Thébault*. Asupra cercurilor ortogonale, de *C. Ionescu-Bujor*. Observaţiuni asupra problemei 4563, de *Alexandru Al. Vasilescu*.

2. *Ştiinţă şi Progres*. Revista ştiinţifică a liceelor Militare, anul IV, No. 2, Mai 1937. Metodă pentru calcularea sumei patratelor primelor n numere, de *Buzincu I. Ioan*. Enigma stelelor temporale, de Prof. *G. G. Constantinescu*. Gazul metan în România, de Căpitan *Ionescu-Pelican*. Prietenia Polono-Română pe tărâm ştiinţific. Publicaţii noui. Note şi Informaţiuni. Probleme rezolvate şi propuse.

3. *Revista de Ciencias*, anul XXXVIII, Martie 1937. Intre alte articole sunt şi următoarele: Asupra preciziunii calculului logaritmic, de *Cristobal de Losada y Puga*. Asupra problemei celor trei corpuri în plan, de *Godofredo Garcia y Alfred Rosemblatt*.

4. *N. G. Botea*. Une propriété de réciprocité. (Extrait des Comptes rendus de la 57e Session, Congrès de Chambéry, 1933.)

5. *N. G. Botea*. Une relation entre nombres complexes et la généralision d'un théorème de géométrie elémentaire. (Extrait du Bulletin de Mathématiques et de Physique pures et appliquées, de l'École Polytechnique Roi Carol II, Bucarest, anul VII, 1935—1936).

PROBLEME REZOLVATE

1513. — *Să se găsească un patrat perfect de forma $abaca$, în care diferenţa între a şi c ne dă rădăcina patrată a lui a şi în care b este prim.*

SUB-LT MIRCEA GRUMAZESCU

Din enunţ rezultă că a este patrat perfect, deci

$$a = 1,\ 4,\ 9$$

şi atunci

$$\sqrt{a} = 1,\ 2,\ 3$$

de unde rezultă:

$$c = a - \sqrt{a} = 0,\ 2,\ 6.$$

Astfel patratele cerute sunt de forma:

$$1b101,\quad 4b424,\quad 9b969.$$

Cum prin enunţ cifra b este un număr prim, rezultă că patratul $abaca$ se va găsi printre numerile:

11101, 12101, 13101, 15101, 17101
41424, 42424, 43424, 45424, 47424
91969, 92969, 93969, 95969, 97969.

Dintre acestea, numerile 13101, 41424, 47424 fiind divizibile prin 3 fără a fi şi prin 9, nu sunt patrate perfecte, iar dintre cele rămase singurul patrat perfect este:

$$97969 = 313^2,$$

care ne dă singura soluţie a problemei.

Soluţii date de d-ra: *Comloşan Cornelia* (studentă, Cluj) şi de d-nii: *Amărăşteanu F. Marcel* (Şc. Polit., Bucureşti), *Anastasiu M. Mihail* (lic. Milit, N. Filipescu), *Andrunachievici Vladimir* (lic. Chişinău), *Anton C. George* (lic. Bistriţa), *Begu I. Ştefan* (lic. Lazăr, Bucureşti), *Buiculescu C. Radu* (lic. Milit, N. Filipescu), *Cazanacli V. Petre* (Chişinău), *Cotescu C-tin* (lic. Milit., Iaşi), *Cristocea Gh. Nicolae* (lic. Milit, N. Filipescu), *Davidovici Paul* (lic. Vaslui), *Diaconescu Marcel*, *Florescu Victor* (lic. Milit., N. Filipescu), *Jidanu I C-tin* (lic. Beiuş), *Kornis Ernest* (lic. Loga, Timişoara), *Lupescu Gh. Corneliu* (Şc. Of de Artilerie), *Matei D D-tru* (lic. Internat, Iaşi), *Medeleanu Ion*, *Moisovici Ştefan* (bacalaureat), *Nedelcu V. Nicolae*, *Negrea A. Mircea* (Brăila), *Nistorescu V. Dan*, *Petrescu C. Benone* (lic. Milit, N. Filipescu), *Popoviciu I. Gavril*, *Rădulescu Gh. Octavian* (lic. Milit., N. Filipescu), *Ripianu Andreiu*, *Rosemberg I.* (lic Roman), *Stamate I. Ionel* (lic. Lugoj), *Staicu I. N.*, *Stoenescu D. Mirel* (lic. Milit., N. Filipescu), *Stoica N. Vasile*, *Theodorescu Dorin* (lic. Milit., N Filipescu), *Tica P. Marin-Gall*, *Tilică C. Ştefan* (lic. T-Severin), *Viciu A. Aurel* (Tg-Mureş) şi *Vlad I. C. M.* (Sub-Lt).

1517. — *Să se rezolve sistemul:*

$$\begin{cases} x(x-y)+y(y-z)+z(z-x)=3 \\ (x-1)(y-1)(z-1)=6 \\ x+y+z=9 \end{cases}$$

SUB-LT. MARIN P. TICA-GALL

Facem substituţia:

$$(1)\qquad x = X+1,\quad y = Y+1,\quad z = Z+1$$

şi sistemul dat devine:

$$(2)\quad \begin{cases} (X+1)(X-Y)+(Y+1)(Y-Z)+(Z+1)(Z-X)=3 \\ XYZ=6 \\ X+Y+Z=6 \end{cases}$$

Prima ecuaţie se mai poate scri:

$$X(X-Y)+Y(Y-Z)+Z(Z-X)=3,$$

sau:

$$X^2+Y^2+Z^2-(XY+YZ+ZX)=3$$

$$\overset{*}{*}\overset{*}{*}\quad (X+Y+Z)^2-3(XY+YZ+ZX)=3.$$

Această ecuaţie în virtutea ecuaţiei a 3-a a sistemului (2), devine:

$$36-3(XY+YZ+ZX)=3,$$

$$\overset{*}{*}\overset{*}{*}\qquad XY+YZ+ZX=11.$$

Sistemul (2) este astfel echivalent cu următorul:

$$(3)\qquad \begin{cases} X+Y+Z=6 \\ XY+YZ+ZX=11 \\ XYZ=6 \end{cases}$$

Având suma, suma produselor câte două şi produsul necunoscutelor X, Y, Z, urmează că ele sunt rădăcinele ecuaţiei de gradul al 3-lea:

$$t^3-6t^2+11t-6=0,$$

ecuaţie care descompusă în factori se scrie:

$$(t-1)(t-2)(t-3)=0.$$

De aci deducem pe X, Y, Z, pe care mărindu-le cu 1, conform substituţiei (1), găsim următoarele sisteme de soluţii pentru sistemul din enunţ:

x	2	2	3	3	4	4
y	3	4	2	4	2	3
z	4	3	4	2	3	2

Soluţii date de d-ra: *Comloşan Cornelia* (studentă, Cluj) şi de d-nii: *Amărăşteanu F. Marcel* (Şc. Polit, Bucureşti), *Anastasiu M. Mihail*, *Anastasescu M. Mihail*, *Andrievici N.* (lic. Milit., N. Filipescu), *Andrunachievici Vladimir* (student, Iaşi), *Apostol Gh. Nicolae* (lic. Milit., Cernăuţi), *Apostol V. Radu* (lic. Milit., N. Filipescu), *Babeţiu C-tin* (lic. Loga, Timişoara), *Begu I. Ştefan* (lic. Lazăr, Bucureşti), *Berinde L. Titus* (lic. Lugoj), *Boşoldea Gr. Grigore* (lic. Milit., Cernăuţi), *Cazanacli V. Petre* (Chişinău), *Cotescu C-tin* (lic. Milit, Iaşi), *Davidovici Paul* (lic. Vaslui), *Deciulescu D. Gh.* (lic. Milit, N. Filipescu), *Diaconescu Marcel*, *Florescu L. Victor* (lic. Milit, N. Filipescu), *Herman Al. Victor* (student, Cluj), *Jidanu C-tin* (lic. Beiuş), *Kornis Ernest* (lic. Loga, Timişoara), *Lăzărescu Stelian* (lic. Milit., N. Filipescu), *Lupescu Gh. Corneliu* (Şc. Of. de Artilerie), *Maşcaş Gh. Petru* (Şc. Polit., Timişoara), *Matei D. D-tru* (lic. Internat, Iaşi), *Medeleanu Ion*, *Milu I. Nicolae* (Şc. Pregăt. de Of.), *Moisovici M. Ştefan* (bacalaureat), *Nedelcu V. Nicolae*, *Negrea A. Mircea* (Brăila), *Negulescu D. Ştefan* (lic. Milit., N. Filipescu), *Nistorescu V. Dan*, *Popoviciu I. Gavril*, *Rădulescu Gh. Octavian* (lic. Milit., N. Filipescu), *Ripianu Andrei*, *Rosemberg I.* (lic. Roman), *Staicu I. N. Stamate I. Ionel*, *Stefănescu Costin* (lic. Milit., N. Filipescu), *Stefănescu D. Nicolae* (lic. Milit., N. Filipescu), *Stoenescu D. Mirel*, *Theodorescu Dorin* (lic. Milit., N. Filipescu), *Tilică C. Ştefan* (lic. T-Severin), *Tarălungă N. D-tru*, *Viciu A. Aurel* (Tg-Mureş) şi *Vlad I. C. M.* (Sub-Lt).

1519. — *Să se arate că în orice triunghiu avem:*

$$\Sigma a\,l_a+\Sigma\cos^2\frac{A}{2}=4s+\frac{1}{2R}\sum r_a,$$

în care l_a *este distanţa dintre ortocentru şi vârful A, iar celel'alte notaţii sunt cele obicinuite.*

CORNELIU LUPESCU

Folosind relaţiile cunoscute:

$$a=2R\sin A,\quad l_a=2R\cos A,\quad \cos\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}},$$

$$\Sigma\sin 2A=4\sin A\sin B\sin C,$$

putem scri succesiv:

$$(1)\quad \Sigma a\,l_a+\Sigma\cos^2\frac{A}{2}=4R^2\Sigma\sin A\cos A+$$

$$\sum\frac{p(p-a)}{bc}=2R^2\Sigma\sin 2A+\frac{p}{abc}\sum a(p-a)=$$

$$8R^2\sin A\sin B\sin C+\frac{p^2}{abc}\sum a-\frac{p}{abc}\sum a^2.$$

Cum încă avem:

$$\sin A\sin B\sin C=\frac{s}{2R^2},$$

$$\Sigma a=2p,\qquad \Sigma a^2=2p^2-2r^2-8Rr$$

$$=2p^2-2r(4R+r)=2p^2-2r\Sigma r_a,$$

(Compléments de Trigonométrie, par F. G. M., p. 583 şi „Gazeta Matematică", vol. XXXVIII, p. 249), relaţiunea (1) devine succesiv:

$$\Sigma a\,l_a+\Sigma\cos^2\frac{A}{2}$$

$$=8R^2\frac{s}{2R^2}+\frac{2p^3}{abc}-\frac{p}{abc}(2p^2-2r\Sigma r_a)$$

$$=4s+\frac{2pr}{abc}\sum r_a=4s+\frac{2s}{abc}\sum r_a$$

$$=4s+2\frac{\frac{abc}{4R}}{abc}\sum r_a=4s+\frac{1}{2R}\sum r_a.$$

Relaţiunea din enunţ este astfel stabilită.

Soluții date de d-nii: *Amărăşteanu F. Marcel* (Şc. Polit., Bucureşti), *Apostol Radu* (Şc. Milit., N Filipescu), *Cazanacli V. Petre* (Chişinău), *Cotescu C-tin* (lic. Milit, Iaşi), *Florescu Victor* (lic. Milit., N. Filipescu), *Matei D. D-tru* (lic. Internat, Iaşi), *Milu I. Nicolae* (Şc. Preg. de Of.), *Negrea A. Mircea* (Brăila), *Negulescu D. Ştefan* (lic. Milit, N. Filipescu), *Popescu Zorica N. Alexandru* (lic. Sf. Iosif, Bucureşti), *Popoviciu I. Gavril*, *Ripianu Andrei*, *Rosemberg I.* (lic. Roman), *Stamate I. Ionel*, *Stefănescu Costin* (lic. Milit., N. Filipescu), *Teodorescu N. Dorin* (lic. Milit, N. Filipescu), *Tica P. Marin-Gall Tilică C. Ştefan* (lic. T-Severin) şi *Ţarălungă N. D-tru.*

1520. — A, B, C *fiind unghiurile unui triunghiu, să se stabilească inegalitatea:*

$$\frac{\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}} < 1$$

V. ALACI

Inmulţind termenii fracţiei cu $2\cos\frac{A}{2}$, cantitate pozitivă, putem scri:

$$\frac{2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}}{4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}} < \frac{1}{2},$$

sau:

$$(1) \qquad \frac{\sin A}{\sin A+\sin B+\sin C} < \frac{1}{2},$$

fiindcă:

$$4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} = \sin A+\sin B+\sin C$$

(Compléments de Trigonométrie, par F. G. M. p. 583.)

Inegalitatea (1) se mai poate scri:

$$\frac{2R\sin A}{2R\sin A+2R\sin B+2R\sin C} < \frac{1}{2},$$

sau:

$$(2) \qquad \frac{a}{a+b+c} < \frac{1}{2},$$

fiindcă:

$$2R\sin A = a, \quad 2R\sin B = b, \quad 2R\sin C = c.$$

Aducând inegalitatea (2) la formă întreagă şi simplificând, obţinem:

$$a < b+c.$$

Dar această inegalitate este adevărată, căci scrie că o latură într'un triunghiu este mai mică decât suma celorlalte două, deci şi inegalitatea de la care am pornit este adevărată.

Soluţii date de d-ra: *Comloşan Cornelia* (studentă, Cluj) şi de d-nii: *Amărăşteanu F. Marcel* (Sc. Polit, Bucureşti), *Andrunachievici Vladimir* (student, Iaşi), *Anton G. George* (lic. Bistriţa), *Apostol V. Radu* (lic. Milit., N. Filipescu), *Babeţiu T. Corneliu* (lic. Loga, Timişoara), *Cazanacli V. Petre* (Chişinău), *Deciulescu D. Gheorghe* (lic. Milit., N. Filipescu), *Florescu Victor* (lic. Milit., N. Filipescu), *Kornis Ernest* (lic. Loga, Timişoara), *Lupescu Gh. Corneliu* (Şc. Of. de Artilerie), *Matei D. D-tru* (lic. Internat, Iaşi), *Medeleanu Ion*, *Milu I. Nicolae* (Şc. Pregăt. de Of.), *Moisovici M. Ştefan* (bacalaureat), *Negrea A. Mircea* (Brăila), *Neguiescu D. Ştefan* (lic. Milit., N. Filipescu), *Popoviciu I. Gavril*, *Rădulescu Gh. Octavian* (lic Milit., N. Filipescu), *Ripianu Andrei*, *Rosemberg I.* (lic. Roman), *Stamate I. Ionel* (lic. Lugoj), *Ştefănescu Costin* (lic. Milit., N. Filipescu), *Stoian S. Ion* (lic. Milit., Tg-Mureş), *Theodorescu N. Dorin* (lic. Milit., N. Filipescu), *Tica P. Marin-Gall*, *Tilică C. Ştefan* (lic. T-Severin), *Ţarălungă N. D-tru*, *Vlad I. C. M.* (Sub-Lt.) şi *Zagaican Ilie* (Conductor de L. P.)

1521. — *Să se găsească patratul perfect a b c a, format din cifre însemnătoare, în care a b şi c a sunt patrate perfecte.*

SUB-LT MARIN P. TICA-GALL

Patratele $a\,b$ şi $c\,a$ pot fi:

16, 25, 36, 49, 64, 81.

Ţinând seamă că prima şi ultima cifră a patratului cerut, sunt egale, rezultă că $a\,b\,c\,a$ ar putea fi:

1681, 4964, 6416, 6436.

Dintre acestea, este patrat perfect numai

$$1681 = 41^2$$

şi ne dă singura soluţie a problemei.

Soluţii date de d-ra: *Comloşan Cornelia* (studentă, Cluj) şi de d-nii: *Anastasiu M. Mihail* (lic. Milit., N. Filipescu), *Andrievici N.*, *Andronache Virgil* (lic. Milit., Tg-Mureş), *Anton George* (lic. Bistriţa), *Babeţiu Corneliu* (lic. Loga, Timişoara), *Berinde L. Titus* (lic. Lugoj), *Boborodea I. Ioan* (lic. Milit., Tg-Mureş), *Cazanacli V. Petre* (Chişinău), *Cernat Camil* (lic. Milit., N. Filipescu), *Cotescu C-tin* (lic. Milit, Iaşi), *Cristocea Gh. Nicolae* (lic. Milit., N. Filipescu), *Dăscălescu Hristache*, *Davidovici Paul* (lic. Vaslui), *Deciulescu Gheorghe* (l c. Milit., N. Filipescu), *Diaconescu Marcel* (lic. Milit., N. Filipescu), *Duiculescu C. Radu* (lic. Milit., N. Filipescu), *Florescu L. Victor* (lic.

Milit., N. Filipescu), *Floareş I. Adrian*, *Heroiu N. Spiridon* (lic. Milit., N. Filipescu), *Horga Leon* (lic. Milit., N. Filipescu) *Ionescu C. Ştefan* (lic. Milit, N. Filipescu), *Jidanu I. Constin* (lic. Beiuş), *Kornis Ernest* (lic. Loga, Timişoara), *Lăzărescu Stelian* (lic. Milit, N. Filipescu), *Lupescu Gh. Corneliu* (Şc. Of. de Artilerie), *Maşcaş Gh. Petru* (Şc. Polit, Timişoara), *Matei D. D-tru*, *Medeleanu Ion*, *Milu I. Nicolae* (Şc. Preg. de Of.), *Moisovici M. Ştefan* (bacalaureat), *Munteanu V. Lazăr* (lic. Milit., Tg-Mureş), *Nedelcu V. Nicolae*, *Negrea A. Leonte-Mircea* (Brăila), *Negulescu V. Ştefan* (lic. Milit., N. Filipescu), *Pascu V. Vasile* (lic. Milit, Tg-Mureş), *Petre C I.* (lic. Milit., N. Filipescu), *Petrescu C. Benone* (lic. Milit, N. Filipescu), *Pompeiu Marica* (lic. Beiuş), *Popoviciu I. Gavril*, *Rădulescu Gh. Octavian* (lic. Milit, N. Filipescu), *Ripianu Andrei*, *Rosemberg I.* (lic. Roman), *Staicu I. Nicolae* (lic. Milit, N. Filipescu), *Stamate I Ionel* (lic. Lugoj), *Ştefănescu Costin* (lic. Militar, N Filipescu), *Ştefănescu D. Nicolae* (lic. Milit, N. Filipescu), *Sternberg H*, *Stoenescu D. Mircel* (lic. Milit, N. Filipescu), *Stoica V. Vasile* (lic. Milit., N. Filipescu), *Theodorescu Dorin* (lic. Milit, N. Filipescu), *Tilica C. Ştefan* (lic. T-Severin), *Vlad I. C. M.* (Sub-Lt) şi *Zagaican Ilie* (Conductor de L. P.)

PROBLEME PROPUSE

1586. — Să se formeze un patrat perfect de şapte cifre, întrebuinţând odată cifra 8 şi de câte două ori pe fiecare din cifrele 2, 3, 9.

G-L GH. BUICLIU

1587. — Să se găsească cari sunt grupele de câte trei cifre consecutive, a căror sumă să fie *mult.* 4.

MIHAIL BOTEZ

1588. — Se dau două cercuri ortogonale O şi O_1, care se taie în P şi P_1.

Se ia punctul A pe cercul O şi se duc dreptele A P şi A P_1, care tae cercul O_1, în B şi C.

Când punctul A variază pe cercul O, se cere:

1°. Locul intersecţiei B P_1, C P.

2°. Locul intersecţiei cercurilor B P O_1, C P_1 O_1.

LOCOT. I. GH. ZAMFIRESCU

1589. — O transversală taie laturile B C, C A, A B ale unui triunghiu A B C în α, β, γ. Dreapta Δ, care uneşte ortocentrele triunghiurilor A B C, $A\beta\gamma$, $B\gamma\alpha$, $C\alpha\beta$ întâlneşte B C, C A, A B respectiv în α', β', γ'. Fie A', B', C' punctele diametral opuse vârfurilor A, B, C pe cercurile circumscrise triunghiurilor $A\beta'\gamma'$, $B\gamma'\alpha'$, $C\alpha'\beta'$. Să se demonstreze că ortocentrul triunghiului A' B' C' este deasemenea pe dreapta Δ.

V. TÉBHAULT

1590. — Să se demonstreze că dacă:

$$x_1 = 2\,m^2\,p\,q^2 - n^2\,p\,(p^2 + q^2)$$

$$y_1 = 2\,m\,n\,p\,q\,(p + q)$$

$$z_1 = 2\,m\,n\,p\,q\,(p - q),$$

m, n, p, q fiind arbitrari, atunci expresiunea

$$(x^2 + y^2 + z^2)\ (x_1^2 + y_1^2 + z_1^2)$$

este o sumă de trei patrate perfecte, oricare ar fi x, y, z.

A. GLODEN

1591. — Ştiind că x_1 şi x_2 sunt rădăcinile ecuaţiei:

$$a\,x^2 + b\,x + c = 0,$$

se cere să se elimine aceste rădăcini din relaţia

$$\frac{x_1^2 + \alpha}{x_2^2 + \alpha} = \beta,$$

fără a rezolva ecuaţia dată.

V. ALACI

1592. — Intr'un triunghiu isoscel de bază a, unghiu la vârf A şi latură b, avem relaţia:

$$a\,(a^2 - 3\,b^2) + 2\,b^2 \sin\frac{3\,A}{2} = 0.$$

N. N. MIHAILEANU

1593. — Să se arate că într'un triunghiu oarecare există relaţia:

$$\cos B = \frac{\cos B + \cos C}{1 - \cos A} + \sin B\,\frac{\cos B - \cos C}{\sin B - \sin C}.$$

Aplicaţii: 1°. A = 0; 2°. B = C; 3°. A = B + C.

LOCOT. C. D. IONESCU-ŢIU

COMPLECTARE. La sfârşitul problemei *1581* din numărul trecut se va adăoga: „*pentru* $a = \pm 1$".

Manuscrise primite de la corespondenţii noştrii până la 10 a lunei curente şi anume: Articole (A), Note (N), probleme propuse (P) şi probleme rezolvate indicate prin numărul lor de ordine.

Anastasiu M. Mihail (1441, 1562, 1574, 1579, 1580); *Czijak Vasile* (1572, 1579); *Dăscălescu St. Hristache* (1562, 1567, 1568, 1573, 1574); *Gloden A.* (N); *Jidanu I. C-tin* (1579, 1580); *Jipa C. Alexandru* (1569, 1584); *Matei D. D-tru* (1459, 1522, 1537, 1538, 1567, 1574, 1583); *Popoviciu I. Gavril* (1523, 1533, 1573, 1578, 1579, 1580, 1584); *Ripianu Andreiu* (1552, 1553, 1555, 1558, 1559, 1566, 1578, 1579, 1580, 1582, 1583, 1584, 1585); *Săruleşteanu Emanoil* (1562, 1574); *Segal Zigu* (P., 1538, 1568, 1578, 1579, 1580, 1583, 1584); *Seibulescu A. C.* (1573, 1575); *Stamate I. Ionel* (1488, 1522, 1537, 1546, 1550, 1567, 1579, 1580, 1585); *Stoenescu D. Mirel* (1574, 1580); *Theodorescu N. Dorin* (1567, 1569, 1574, 1575, 1580); *Vişa Eugen* (P).

INFORMAŢIUNI

La Redacţiunea „Revistei Matematice din Timişoara" se primesc abonamente pentru:

BOLETIN MATEMATICO

ANUL AL X-LEA

care a început în Martie 1937.

Costul *special* a unui abonament este de 200 lei.

Această Revistă se publică în Buenos-Aires, Republica Argentina.

Pentru anul al X-lea care a începe în Martie 1937, s'au primit până acum la Redacţia „R. M. T." următoarele abonamente:

1. Locotenent *Costăchescu Constantin,* Distrugătorul *„Regina Maria"*, Constanţa.
2. Profesor *I. Nemet,* Casa învăţătorilor, str. Remus, Timişoara.
3. Dr. *Teofil Vescan,* Calea Regele Ferdinand, 110, Cluj.
4. Profesor *Spiridon Ghiţescu,* liceul de băeţi din Mizil.

Răspundem pe această cale, la toţi acei corespondenţii, care se plâng că anumite probleme nu le-au fost considerate, că aceasta se datoreşte sau faptului că acele soluţiuni au sosit întârziate, sau au fost greşite, sau n'au sosit de loc.

Evident că astfel de probleme nu pot fi luate, în seamă.

Legându-se colecţia R. M. T., anul XV, în volum şi rămânând numere răzleţe care nu au putut fi legate, putem trimete corespondenţilor noştri numere care eventual le lipsesc din colecţie în schimbul sumei de 10 lei. Doritorii se vor adresa administraţiei revistei, trimiţând suma prin mandat poştal.

Rugăm călduros pe corespondenţii noştrii să facă cunoscut această REVISTĂ colegilor şi camarazilor lor.

Figurile ce însoţesc soluţiile problemelor, notelor şi articolelor, trebuesc desemnate cu îngrijire pe foi albe (neliniate) şi de e posibil în tuş.

SPHINX

Revue mensuelle des questions récréatives

FONDÉE EN 1931

REVUE UNIQUE DANS SON GENRE
dans le monde entier

ABONNEMENTS:
1 an: Belgique, **30 fr.** France, **25** fr.
Etranger, 7 **belgas**.

Administration:
SPHINX, Bruxelles 75, Rue Philippe Baucq

Toţi cei ce ne trimet articole, note, probleme propuse sau rezolvate, pentru a fi luate în consideraţie, sunt obligaţi a fi abonaţi la Revista Matematică din Timişoara.

Anunţăm că nu vom mai lua în considerare problemele rezolvate, iscălite de mai mulţi corespondenţi. Fiecare corespondent trebue să-şi redacteze problema rezolvată de el, şi s'o iscălească.

Fiecare problemă rezolvată, notă sau articol trebuesc scrise pe sferturi de coale de hârtie şi însoţite de enunţ. Problemele propuse trebuesc însoţite şi de soluţiile lor.

Fiecare problemă rezolvată trebue să fie scrisă aparte şi să nu se continue cu alte probleme, căci nu se pot repartiza la numerile corespunzătoare, deci nu pot fi luate în seamă.

Se găsesc broşate colecţiile R. M. T. din anii II — XVI, cu preţul de lei 120 volumul şi se trimet la cerere.

SPHINX

Revue mensuelle des questions récréatives

PARAÎT EN 1921

REVUE UNIQUE DANS SON GENRE

dans le monde entier

ABONNEMENTS

1 an: Belgique, 10 fr. France, 25 fr.
Etranger, 7 belgas

Administration

SPHINX, Bruxelles 15, Rue Philippe Baucq

ANUL XVII. 15 IULIE 1937 No. 5.

REVISTA MATEMATICĂ
DIN
TIMIȘOARA

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA APARE ODATA PE LUNA.
PREȚUL UNUI NUMAR 12 LEI PREȚUL ABONAMENTULUI 100 LEI PE AN.

CUPRINSUL

1 IOAN C. SAVIN: SISTEME DE ECUATIUNI REZOLVATE CU AJUTORUL FORMULELOR LUI NEWTON.
3. NOTE MATEMATICE: 10, 11.
4. BIBLIOGRAFIE.
5. PROBLEME REZOLVATE: 299, 1523, 1524, 1540, 1551, 1552.
6. PROBLEME PROPUSE: 1594–1601.
7. INFORMATIUNI.

TIMISOARA
Institut de Arte grafice Tipografia Românească

„Orice profesor de matematici, din orice colţ al ţării şi de la orice şcoală, trebuie să fie apostol al specialităţii sale. Din felul cald şi luminos cum îşi face lecţiile, din drumul drept şi demn pe care îl urmează în viaţă, trebuie să apară limpede că judecata matematică precisă şi sigură, curată ca cristalul, are o înaltă şi admirabilă valoare educativă pentru viaţă.

Adevărul curat, adevărul drept, adevărul luminos, să fie îndreptarul vieţei noastre. Aceasta să fie contribuţia specialităţii noastre la îndrumarea neamului românesc, pe calea care-i stă deschisă".

G. ŢIŢEICA

Manuscrisele destinate Revistei Matematice din Timişoara conţinând soluţiunile problemelor propuse şi probleme, note sau articole originale vor fi trimise pe adresa: **V. Alaci,** profesor Şcoala Politechnică, Timişoara.

Plata abonamentului precum şi reclamaţiunile de neprimirea Revistei vor fi adresate d-lui **Prof. C. Teodorescu,** Rectorul Şcoalei Politechnice din Timişoara.

Plata abonamentului se face prin CEC (Casa de economii şi cecuri postale. unde revista are contul CEC No. 85208, sau prin mandat postal adresat d-lui Prof. C. TEODORESCU, Rectorul Şcoalei Politechnice din Timişoara.

Taxa de Membru în „Comitetul de Conducere al Revistei Matematice din Timişoara" este pentru anul XVII, de 200 (două sute) lei.

Colecţia R. M. T., se găseşte la Administraţia Revistei, şi se poate procura în schimbul preţului:

Anul I, epuizat. Anii: II—XVI inclusiv, broşate, 120 lei fiecare.

ANUL XVII — No. 5. TIMISOARA, 15 IULIE 1937

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA

APARE LA 15 A FIECAREI LUNI

PREȚUL UNUI NUMAR . . . . . 12 LEI
ABONAMENT ANUAL . . . . . 100 LEI
Abonamentele sunt socotite totdeauna dela 15 Martie

REDACȚIA: Prof. V. ALACI
Școala Politechnică din Timișoara.
ADMINISTRAȚIA: Prof. C. TEODORESCU
Rectorul Școalei Politechnice din Timișoara.

SISTEME DE ECUAȚIUNI REZOLVATE CU AJUTORUL FORMULELOR LUI NEWTON

De

S-LT. IOAN C. SAVIN

Această metodă este avantajoasă pentru anumite sisteme, prin faptul că indică un drum sigur spre rezolvarea lor.

Singura greutate este de a pune sistemul sub o formă, care să evidențieze elementele ce intră în compunerea formulelor lui *Newton*.

Consider în primul rând ecuația de gradul al 2-lea

$$t^2 + a_1 t + a_2 = 0,$$

pentru care formulele lui *Newton* sunt

(2) $S_1 + a_1 = 0$ $\qquad S_1 = x_1 + x_2$

(3) $S_2 + a_1 S_1 + 2 a_2 = 0$ unde $\qquad S_2 = x_1^2 + x_2^2$

(4) $S_3 + a_1 S_2 + a_2 S_1 = 0$ $\qquad S_3 = x_1^3 + x_2^3$

. . . . . $\qquad \vdots$

. . . . . $\qquad S_n = x_1^n + x_2^n.$

1. Dacă în sistemul din problema 862 R. M. T. notăm $x^n = x_1$ *și* $y^n = x_2$, atunci el devine

(5) $S_2 + S_1 + 2 a_2 = a$ $\qquad$ (6) $S_3 = b.$

Eliminând pe S_1 și S_2 între (2), (3) și (5), găsim:

$$a_1^2 - a_1 - a = 0, \quad \text{de unde } a_1 = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 4a}}{2} = A.$$

Deasemeni găsim

$$a_2 = \frac{A^3 - b}{3A},$$

ecuația (1) devine

$$t^2 - A t + \frac{A^3 - b}{3A} = 0.$$

Rezolvind-o, ne dă soluțiile publicate în R. M. T., pag. 33, anul X.

2. *Vom considera sistemul din problema 975 mai general:*

$$x^n + y^n = a z^n, \qquad x^{2n} + y^{2n} = b z^{2n},$$
$$x^{3n} + y^{3n} = d - c z^{3n}.$$

Fie x^n și y^n rădăcinele ecuației (1), deci putem scrie:

$$S_1 = a z^n, \qquad S_2 = b z^{2n}, \qquad S_3 = d - c z^{3n}.$$

Punând aceste valori în (2), (3) și (4), avem:

$$a_1 = -a z^n, \qquad a_2 = \frac{a^2 - b}{2} z^{2n},$$

iar (4) ne dă

$$z^n = \sqrt[3]{\frac{2d}{2c + 3ab - a^3}}.$$

Făcând $a = 3$, $b = 5$, $c = 1$, $d = 8$, $n = 1$, ne dă ecuația:

$t^2 - 6t + 8 = 0$, de unde $t_1 = 4$, $t_2 = 2$,

de unde

$$z = 2, \quad x = 4, \quad y = 2$$
$$z = 2, \quad x = 2, \quad y = 4.$$

3. *Sistemul 983 se mai poate scrie:*

$$(x^n + y^n)(x^{2n} + y^{2n}) = a$$
$$(x^n + y^n)(x^{2n} + y^{2n} - 2x^n y^n) = b.$$

Fie x^n și y^n rădăcinele ecuației (1), putem scrie:

(5) $\qquad S_1 S_2 = a, \qquad S_1 (S_2 - 2 a_2) = b.$

Eliminând pe S_1, S_2 și a_2 între (2) și (3), avem:

$$a_1 = \sqrt[3]{b - 2a}, \qquad a_2 = \frac{b - a}{2\sqrt[3]{b - 2a}} = 0.$$

Ecuația (1) devine:

$$t^2 + \sqrt[3]{b - 2a}\, t + \frac{b - a}{2\sqrt[3]{b - 2a}} = 0, \qquad x = \sqrt[n]{f(a, b)}, \quad y = \sqrt[n]{\varphi(a, b)}$$

Punând

$$b = 117, \quad a = 1157 \quad \text{şi} \quad n = 1,$$

găsim soluţiile particulare ale problemei indicate de enunţ.

4. *Sistemul 991 se poate scrie mai general:*

$$(p\,x)^{2n} + (q\,y)^{2n} = a$$

$$p\,q\,x\,y\,[(p\,x)^{2n} + (q\,y)^{2n}] = b,$$

$(p\,x)^n$ şi $(q\,y)^n$ fiind rădăcinele ecuaţiei (1), scriu

$$S_2 = a, \qquad a_2 S_2 = b, \quad \text{de unde} \quad a_2 = \frac{b}{a},$$

Punând în (3) valorile găsite, avem:

$$(6) \qquad a_1 S_1 = -\frac{a^2 + 2b}{a}.$$

Din (2) şi (6) scoatem

$$u^2 - \frac{a^2 + 2b}{a} = 0, \quad \text{de unde} \quad a_1 = \pm\sqrt{\frac{a^2+2b}{a}},$$

(1) devine

$$t^2 \pm \sqrt{\frac{a^2+2b}{a}}\,t + \frac{b}{a} = 0,$$

de unde scoatem

$$x = \frac{1}{p}\sqrt[n]{\frac{\sqrt{a^2+2b} + \sqrt{a^2-2b}}{2\sqrt{a}}}$$

$$y = \frac{1}{q}\sqrt[n]{\frac{\sqrt{a^2+2b} - \sqrt{a^2-2b}}{2\sqrt{a}}},$$

făcând

$$a = 104, \quad b = 1040, \quad p = 1, \quad q = 4, \quad n = 1,$$

vom găsi soluţiile particulare a sistemului dat prin enunţ.

***

Fie acum ecuaţia de gradul al 3-lea

$$(7) \qquad t^3 + a_1 t^2 + a_2 t + a_3 = 0,$$

formulele lui *Newton* sunt:

$$(8) \qquad S_1 + a_1 = 0$$

$$(9) \qquad S_2 + a_1 S_1 + 2a_2 = 0$$

$$(10) \qquad S_3 + a_1 S_2 + a_2 S_1 + 3a_3 = 0$$

. . . . . .

. . . . . .

5. *Considerăm sistemul 955 din R. M. T., luat în general*

$$\Sigma x^n = a, \qquad \Sigma x^{2n} + m\,x^n y^n z^n = b,$$

$$\Sigma x^{2n} y^n + 3\,x^n y^n z^n = c.$$

Ele se mai pot scrie:

$$(11) \quad S_1 = a, \quad S_2 - m\,a_3 = b, \quad S_1^3 - S_3 - 3\,a_3 = 3\,c.$$

Eliminând pe S_1, S_2, S_3, a_1 între relaţiile (8), (9), (10) şi (11), găsim

$$m\,a_3 + 2\,a_2 = a^2 - b$$

$$m\,a_3 - a_2 = a^2 - b - \frac{3\,c}{a},$$

de unde

$$a_2 = \frac{c}{a}, \qquad a_3 = \frac{a^3 - a\,b - 2\,c}{a\,m}.$$

Ecuaţia (7) devine

$$t^3 - a\,t^2 + \frac{c}{a}\,t + \frac{a^3 - a\,b - 2\,c}{a\,m} = 0,$$

făcând în ecuaţia rezultată

$$a = 7, \quad b = 5, \quad c = 98, \quad m = -2, \quad n = 1,$$

găsim ecuaţia

$$t^3 - 7\,t^2 + 14\,t - 8 = 0,$$

care ne dă soluţiile de la pag. 23, anul XI, R. M. T.

6. *Considerăm sistemul sub numărul 883, scris mai general:*

$$(12) \quad \begin{cases} x^n + y^n + z^n = a & S_1 = a \\ x^{2n} + y^{2n} + z^{2n} = b \quad \text{sau} & S_2 = b \\ x^n y^n z^n + \Sigma x^n y^n = c & -a_3 + a_2 = c. \end{cases}$$

Ţinând seama de ecuaţiile (8), (9) şi (12), găsim:

$$a_1 = -a, \qquad a_2 = \frac{a^2 - b}{2}, \qquad a_3 = \frac{a^2 - b - 2c}{2}.$$

Ecuaţia (7) devine:

$$2\,t^3 - 2\,a\,t^2 + (a^2 - b)\,t + a^2 - b - 2\,c = 0.$$

Rezolvind ecuaţia, găsim

$$x = \sqrt[n]{f(a,b,c)}, \quad y = \sqrt[n]{\varphi(a,b,c)}, \quad z = \sqrt[n]{\psi(a,b,c)}.$$

Făcând

$$a = \frac{17}{2}, \qquad b = \frac{161}{4}, \qquad c = 22, \qquad n = 1,$$

găsim soluţiile arătate în R. M. T., anul X, pag. 68.

7. *Sistemul propus în R. M. T. cu Nr. 940, se poate scrie mai general*

$$\Sigma x^n = a. \qquad \Sigma x^{3n} + m x^n y^n z^n = b,$$

$$x^n y^n z^n (\Sigma x^{3n}) = c,$$

sau

$$S_1 = a, \qquad S_3 - m a_3 = b, \qquad -S_3 a_3 = c.$$

Eliminând pe S_3 între ultimile două relaţii, avem:

$$m a_3^2 + b a_3 + c = 0,$$

de unde

$$a_3 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4mc}}{2m}$$

$$S_3 = \frac{b \pm \sqrt{b^2 - 4mc}}{2}.$$

Ţinând seama de relaţiile (8), (9) şi (10), găsim:

$$a_1 = -a,$$

$$a_2 = \frac{2a^3 m + b(3-m) \mp (m+3)\sqrt{b^2 - 4mc}}{6am},$$

cunoscând pe a_1, a_2 şi a_3, ecuaţia (7) ne va da

$$x = \sqrt[n]{f(a,b,c,m)}, \qquad y = \sqrt[n]{\varphi(a,b,c,m)}$$

şi

$$z = \sqrt{\psi(a,b,c,m)}.$$

Punând

$a = 10$, $b = 100$, $c = 4800$, $m = -2$, $n = 1$,

găsim soluţiile publicate în R. M. T., Vol. XI, pag. 44.

8. *Sistemul propus în R. M. T. sub numărul 1008, mai în general:*

$$\sum \frac{x^n}{y^n z^n} = a, \quad \sum (x^n + y^n) = b,$$

$$\left(\sum x^n\right)^2 - \sum x^n (y^n + z^n) = c.$$

Desfăcând sumele putem scrie

$$S_2 = -a a_3, \qquad 2S_2 + 2a_2 = b, \qquad S_1^2 - 2a_2 = c,$$

ultima se mai poate scrie $S_2 = c$.

Ţinând seama de (8) şi (9) şi relaţiile de mai sus găsim

$$a_2 = \frac{b-2c}{2}, \quad a_1 = \pm\sqrt{b-c}, \quad a_3 = -\frac{c}{a}.$$

Ecuaţia (7) devine

$$(13) \quad t^3 \mp \sqrt{b-c}\, t^2 + \frac{b-2c}{2} t - \frac{c}{a} = 0.$$

Rezolvind-o găsim

$$x = \sqrt[n]{f(a,b,c)}, \quad y = \sqrt[n]{\varphi(a,b,c)}, \quad z = \sqrt[n]{\psi(a,b,c)},$$

făcând

$$a = \frac{67}{75}, \quad b = 458, \quad c = 134, \quad n = 1,$$

(13) devine

$$t^3 \mp 18 t^2 + 95 t - 150 = 0.$$

Rezolvind-o găsim soluţiile:

$$t_1 = 3, \qquad t_2 = 5, \qquad t_3 = 10,$$

$$t_1^1 = 1{,}2, \qquad t_2^1 = -9{,}6 + \sqrt{-29{,}84},$$

$$t_3^1 = -9{,}6 - \sqrt{-29{,}84},$$

care dau naştere *la 12 soluţii.*

9. *Sistemul propus în R. M. T. sub numărul 1075*

$$\Sigma x^{2n} - \Sigma x^n y^n = a, \qquad \Sigma x^{3n} + p x^n y^n z^n = b,$$

$$\Sigma x^{2n} y^{2n} z^n = c.$$

Ele se mai pot scrie

$$S_2 - a_2 = a, \qquad S_3 - p a_3 = b, \qquad -a_3 a_2 = c.$$

Aflăm valorile lui a_1, a_2 şi a_3 şi vom avea valorile

$$x = \sqrt[n]{f(a,b,c,p)}, \qquad y = \sqrt[n]{\varphi(a,b,c,p)},$$

$$z = \sqrt[n]{\psi(a,b,c,p)},$$

făcând

$$a = 3, \qquad b = 18, \qquad c = 66, \qquad p = -3,$$

găsim ecuaţia:

$$t^3 - 6t^2 + 11t - 6 = 0,$$

care ne dă rădăcinele

$$t_1 = 1, \qquad t_2 = 2, \qquad t_3 = 3,$$

care dau *naştere la 6 soluţii.*

10. *Sistemul propus în R. M. T. sub Nr. 1078.*

Sistemul mai general este:

$$\cos\frac{x}{2}\cos\frac{y}{2}\cos\frac{z}{2} = a, \quad \Sigma\cos x = b, \quad \Sigma\sin^2 x = c,$$

$$-3 \leqq b, c \leqq 3, \qquad -1 \leqq a \leqq 1.$$

Transformăm, arcele întregi în jumătaţi de arcuri, sistemul devine

$$\cos\frac{x}{2}\cos\frac{y}{2}\cos\frac{z}{2}=a, \qquad 2\sum\cos^2\frac{x}{2}=b-3,$$

$$2\sum\cos^2\frac{x}{2}-2\sum\cos^4\frac{x}{2}=1.$$

Acestea devin:

$$-a_3=a, \qquad 2S_2=b-3, \qquad 2S_2-2S_4=1.$$

Ele se mai pot scrie

$$S_2-a_2=a, \qquad S_3-pa_3=b, \qquad -a_3a_2=b.$$

Cu ajutorul acestor relaţii şi (8), (9) şi (10) determinăm pe a_1, a_2, a_3 şi deci (7) ne va dă

$$x=\sqrt[n]{f(a,b,c,p)}, \qquad y=\sqrt[n]{\varphi(a,b,c,p)},$$

$$z=\sqrt[n]{\psi(a,b,c,p)},$$

făcând

$$a=3,\ b=18,\ c=66,\ p=-3,\ n=1,$$

(7) devine:

$$t^3-6t^2+11t-6=0,$$

care ne dă soluţiile

$$t_1=1, \quad t_2=2 \quad \text{şi} \quad t_3=3,$$

dând naştere la un sistem de *şase soluţii.*

10. *Sistemul propus în R. M. T. sub No. 1100*

$$\begin{cases} \Sigma x^n-\Sigma x^n y^n+x^n y^n z^n=a \\ \Sigma(x^n+y^n)^2=b \\ \Sigma(x^{3n}-1)(y^n-1)(z^n-1)=c. \end{cases}$$

Ultima ecuaţie se poate scrie:

$$(x^n-1)(y^n-1)(z^n-1)[\Sigma x^{2n}+\Sigma x^n+3]=c.$$

Ecuaţiile se mai pot scrie:

$$S_1-a_2-a_3=a, \qquad 2S_2+2a_2=b,$$

$$(S_1-a_2-a_2-a_3-1)(S_2+S_1+3)=c.$$

Ţinând seama de aceste relaţiuni şi de (8), (9), găsim

$$a_1^2+a_1+\frac{b+c-ab-3a+3}{a-1}=0,$$

de unde scoatem:

$$a_1=\frac{-1\pm\sqrt{1+4\cdot\dfrac{ab+3a-b-c-3}{a-1}}}{2}=A.$$

Deasemeni

$$a_2=\frac{2A^2-b}{2}, \qquad a_3=\frac{b-2A^2-2A-2a}{2}.$$

Cunoscând pe a_1, a_2, a_3, ecuaţia (7) ne dă

$$x^n=\sqrt[n]{f(a,b,c)}, \quad y^n=\sqrt[n]{\varphi(a,b,c)}, \quad x_n=\sqrt[n]{\psi(a,b,c.}$$

Făcând

$$a=16, \qquad b=200, \qquad c=1055, \qquad n=-2,$$

găsim:

$$a_1=11, \qquad a_2=22, \qquad a_3=-48$$

$$a_2'=-12, \qquad a_2'=44, \qquad a_3'=-48.$$

Ecuaţia (7) devine respectiv

$$t^3+11t^2+22t-48=0$$

$$t^3-12t^2+44t-48=0$$

şi găsim soluţiile:

$$t_1=2, \qquad t_2=4, \qquad t_3=6$$

$$t_1'=1{,}2, \quad t_2=-6{,}1+\sqrt{5}, \quad t_3=-6{,}1-\sqrt{5},$$

care ne dau un sistem de *12 soluţii.*

11. *Sistemul propus în R. M. T. sub No. 1102 scris mai general, devine:*

$$\Sigma\sin^n x=a, \qquad \Sigma\operatorname{cosec}^n x=b,$$

$$\Sigma\cos^{2n}x(\sin^n y+\sin^n z)$$

$$=c+m\sin^n x\sin^n y\sin^n z.$$

$$-3\leqq a\leqq 3 \qquad -3\geqq b\geqq 3$$

Ultima se mai poate scrie

$$2\Sigma\sin^n x-\Sigma\sin^{2n}x\sin^n y=c+m\sin^n x\sin^n y\sin^n z.$$

Toate relaţiile se mai pot scrie

$$S_1=a, \qquad a_2=-ba_3,$$

$$2S_1-\frac{S_1^3-S_3+6a_3}{3}=c-ma_3.$$

Ţinând seama de aceste relaţii şi de (8), (9) şi (10), găsim:

$$a_1=-a, \quad a_2=\frac{b(2a-c)}{m-3+ab}, \quad a_3=\frac{c-2a}{m-3+ab}.$$

Ecuaţia (7) devine:

$$x^3-ax^2+\frac{b(2a-c)}{m-3+ab}x+\frac{c-2a}{m-3+ab}=0.$$

Rezolvind-o ne dă

$$x=\sqrt[n]{f(a,b,c,m)},\qquad y=\sqrt[n]{\varphi(a,b,c,m)},$$

$$z=\sqrt[n]{\psi(a,b,c,m)}.$$

Făcând

$$a=\frac{3+\sqrt{2}}{2},\quad b=3+\sqrt{2},\quad c=\frac{12-3\sqrt{2}}{8},\quad m=3,$$

ecuaţia de mai sus devine

$$x^3-\frac{3+\sqrt{2}}{2}x^2+\frac{2+3\sqrt{2}}{4}x+\frac{\sqrt{2}}{4}=0,$$

care ne dă rădăcinele $1, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}$, dând naştere la un sistem de *6 soluţii.*

12. *Sistemul propus în R. M. T. sub Nr. 1034.*

$$\Sigma x^{2n}=a,\qquad \Sigma x^n=x^n y^n z^n,\qquad \Sigma x^{2n}y^{2n}=c.$$

Insemnând

$$\Sigma x^n=x^n y^n z^n=\lambda, \tag{14}$$

putem scrie

$$(\Sigma x^n y^n)^2=c+2\lambda^2,\quad \text{deci}\quad \Sigma x^n y^n=\pm\sqrt{b+2\lambda^2},$$

avem deci ecuaţia:

$$t^3-\lambda t^2\pm\sqrt{b+2\lambda^2}\,t-\lambda=0. \tag{15}$$

Determinăm pe λ cu ajutorul formulei lui *Newton.*

$$S_1-\lambda=0,\quad S_2-\lambda S_1\pm 2\sqrt{b+2\lambda^2}=0.$$

De unde ţinând seama că $S_2=a$, avem

$$\lambda=\pm\sqrt{a+4\pm 2\sqrt{2a+b+4}},$$

deci:

$$x=\sqrt[n]{f(a,b)},\qquad y=\sqrt[n]{\varphi(a,b)}.\qquad z=\sqrt{\psi(a,b)}.$$

Dacă facem

$$a=14,\qquad b=49,\qquad n=1,$$

găsim

$$\lambda=0,\qquad -\sqrt{7},\qquad \sqrt{7},$$

şi punând aceste valori în (15), găsim soluţiile date în R. M. T., pag. 21 şi încă 18 soluţii, care au fost omise în rezolvarea acestei problemei, total *36 soluţii.*

***

Considerăm acum ecuaţia de gradul al 4-lea:

$$x_1^4+a_1x_1^3+a_2x_1^2+a_3x_1+a_4=0. \tag{16}$$

Formulele lui *Newton* sunt:

$$S_1+a_1=0$$
$$S_2+a_1S_1+2a_2=0$$
$$S_3+a_1S_2+a_2S_1+3a_3=0$$
$$S_4+a_1S_3+a_2S_2+a_3S_1+4a_4=0$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

13. *Sistemul propus sub No. 948, devine:*

$$\sum_{S_1}x^n=a,\quad \sum_{S_2}x^{2n}=b,\quad \sum_{S_3}x^{3n}=c,\quad x^n y^n=z^n u^n.$$

Ţinând seama de formulele lui *Newton*, găsim:

$$a_1=-a,\quad a_2=\frac{a^2-b}{2},\quad a_3=\frac{3ab-a^3-2c}{6},$$

(16) devine

$$x_1^4-ax_1^3+\frac{a^2-b}{2}x_1^2+\frac{3ab-a^3-2c}{6}x_1+a_4=0.$$

Putem scrie

$$(x^n+y^n)z^n u^n+(z^n+u^n)x^n y^n=\frac{a^3-3ab+2c}{6},$$

cum

$$z^n u^n=x^n y^n,$$

atunci

$$x^n y^n=z^n u^n=\frac{a^3-3ab+2c}{6a},$$

de unde

$$a_4=x^n y^n z^n u^n=\left(\frac{a^3+3ab+2c}{6a}\right)^2.$$

Deci (16) devine:

$$x_1^4-ax_1^3+\frac{a^2-b}{2}x_1^2+\frac{3ab-a^3-2c}{6}x_1+$$
$$\left(\frac{a^3+2c-3ab}{6a}\right)^2=0,$$

de unde

$$x=\sqrt[n]{f(a,b,c)},\quad y=\sqrt[n]{\varphi(a,b,c)},\quad z=\sqrt[n]{\psi(a,b,c)}$$
$$u=\sqrt[n]{\pm(a,b,c)},$$

făcând

$$a=12,\qquad b=170,\qquad c=1764,\qquad n=1,$$

găsim soluţiile publicate în R. M. T., anul XI, pag. 32.

Mă opresc la ecuaţia de gradul al 4-lea, de oarece, cele mai obişnuite sisteme, nu trec de gradul al 4-lea.

Totuşi, metoda este foarte uşoară şi este aceiaşi, oricare ar fi gradul sistemului.

NOTE MATEMATICE

10. — *Sur certains carrés parfaits.*

1. Voici les nombres entiers de *deux* chiffres qui vérifient l'équation

$$x^2 + y^2 = z^2 + 1,$$

en négligeant le cas où $x = z$.

$06^2+17^2=18^2+1$ $26^2+65^2=70^2+1$
$07^2+11^2=13^2+1$ $27^2+89^2=93^2+1$
$09^2+12^2=15^2+1$ $28^2+39^2=48^2+1$
$09^2+19^2=21^2+1$ $29^2+29^2=41^2+1$
$10^2+15^2=18^2+1$ $29^2+37^2=47^2+1$
$10^2+49^2=50^2+1$ $29^2+67^2=73^2+1$
$11^2+29^2=31^2+1$ $31^2+34^2=46^2+1$
$13^2+19^2=23^2+1$ $31^2+43^2=53^2+1$
$13^2+41^2=43^2+1$ $31^2+56^2=64^2+1$
$14^2+17^2=22^2+1$ $31^2+77^2=83^2+1$
$14^2+31^2=34^2+1$ $33^2+64^2=72^2+1$
$14^2+97^2=98^2+1$ $34^2+47^2=58^2+1$
$15^2+26^2=30^2+1$ $34^2+79^2=86^2+1$
$15^2+55^2=57^2+1$ $35^2+45^2=57^2+1$
$17^2+34^2=38^2+1$ $36^2+89^2=96^2+1$
$17^2+46^2=48^2+1$ $37^2+51^2=63^2+1$
$18^2+71^2=73^2+1$ $38^2+49^2=62^2+1$
$19^2+29^2=33^2+1$ $39^2+71^2=81^2+1$
$19^2+43^2=47^2+1$ $39^2+91^2=99^2+1$
$19^2+89^2=91^2+1$ $41^2+64^2=76^2+1$
$20^2+25^2=32^2+1$ $41^2+79^2=89^2+1$
$21^2+53^2=57^2+1$ $43^2+59^2=73^2+1$
$22^2+31^2=38^2+1$ $43^2+71^2=83^2+1$
$23^2+29^2=37^2+1$ $44^2+57^2=72^2+1$
$23^2+41^2=47^2+1$ $46^2+63^2=78^2+1$
$23^2+64^2=68^2+1$ $49^2+67^2=83^2+1$
$24^2+55^2=60^2+1$ $51^2+55^2=75^2+1$
$25^2+35^2=43^2+1$ $52^2+71^2=88^2+1$
$25^2+49^2=55^2+1$ $53^2+69^2=87^2+1$
$26^2+33^2=42^2+1$ $55^2+75^2=93^2+1$

N. B. Observons les égalités suivantes :

1°. $06^2+17^2=09^2+12^2=18^2+1$
$13^2+41^2=25^2+35^2=43^2+1$
$15^2+55^2=21^2+53^2=35^2+45^2=57^2+1$
$17^2+34^2=22^2+31^2=38^2+1$
$17^2+46^2=28^2+39^2=48^2+1$
$17^2+71^2=29^2+67^2=73^2+1$
$19^2+43^2=23^2+41^2=29^2+37^2=47^2+1$
$27^2+89^2=55^2+75^2=93^2+1$
$31^2+77^2=43^2+71^2=49^2+67^2=83^2+1$
$33^2+64^2=44^2+57^2=72^2+1$

2°. $5^4+7^4=55^2+1.$

2. Certaines de ces valeurs de x, y, z possèdent une propriété curieuse. Les carrés de x^2 et y^2 peuvent être décomposés, à la fois, en les sommes

$$x^2 = m\,.\,z + n, \qquad y^2 = p\,.\,z + q,$$

où m, n, p, q sont des entiers qui vérifient, en outre, les égalités

$$m + n = p + q = z.$$

$9^2= 81= 3.21+18$ $19^2=361=17.21+4$
$7^2= 49= 3.13+10$ $11^2= 121= 9.13+4$
$11^2= 121= 3.31+28$ $29^2= 841=27.31+4$
$13^2= 169= 3.43+40$ $41^2=1681=39.43+4$
$15^2= 225= 3.57+54$ $55^2=3025=53.57+4$
$17^2= 289= 3.73+70$ $71^2=5041=69.73+4$
$19^2= 361= 3.91+88$ $89^2=7921=87.91+4$
$29^2= 841=20\,41+21$ $29^2= 841=20.41+21$
$39^2=1521=18.81+63$ $71^2=5041=62.81+19$

3. Dans un supplément à *Mathesis*, 1936—10, nous avons déterminé des systèmes de numération, de base B, dans lesquels figurent, à la fois, des carrés parfaits de quatre chiffres des formes

$$a\,a\,b\,b = (c\,c)^2, \qquad b\,b\,a\,a = (d\,d)^2.$$

On doit avoir successivement

$$\mathrm{B} = a + b - 1, \qquad c^2 = a\,.\,(\mathrm{B} - 1) + 1,$$
$$d^2 = b\,.\,(\mathrm{B} - 1) + 1,$$

et, si l'on pose

$$c^2 = m\ \mathrm{B} + n, \qquad d^2 = p\,.\,\mathrm{B} + q,$$

où m, n, p, q sont plus petits que B, il faut aussi que

$$m + n = p + q = \mathrm{B}.$$

D'ailleurs, on a

$$m = a - 1, \quad n = b, \quad p = b - 1, \quad q = u.$$

On obtient alors, en vertu de ce qui prècède, les carrés curieux suivants des formes envisagées[1])

[1]) Une notation telle que $\overline{10}$ désigne un nombre d'un chiffre dont 10 est la valeur exprimée dans le système décimal.

$\overline{10}\,\overline{10}\,4\,4 = (\overline{11}\,\overline{11})^2 \quad 44\,\overline{10}\,\overline{10} = (77)^2 \quad B = 13$

$\overline{18}\,\overline{18}\,4\,4 = (\overline{19}\,\overline{19})^2 \quad 44\,\overline{18}\,\overline{18} = (99)^2 \quad B = 21$

$\overline{28}\,\overline{28}\,4\,4 = (\overline{29}\,\overline{29})^2 \quad 44\,\overline{28}\,\overline{28} = (\overline{11}\,\overline{11})^2 \quad B = 31$

$\overline{21}\,\overline{21}\,\overline{21}\,\overline{21} = (\overline{29}\,\overline{29})^2 \quad B = 41$

$\overline{40}\,\overline{40}\,4\,4 = (\overline{41}\,\overline{41})^2 \quad 4\,4\,\overline{40}\,\overline{40} = (\overline{13}\,\overline{13})^2 \quad B = 43$

$\overline{54}\,\overline{54}\,4\,4 = (\overline{55}\,\overline{55})^2 \quad 4\,4\,\overline{54}\,\overline{54} = (\overline{15}\,\overline{15})^2 \quad B = 57$

$\overline{70}\,\overline{70}\,4\,4 = (\overline{71}\,\overline{71})^2 \quad 4\,4\,\overline{70}\,\overline{70} = (\overline{17}\,\overline{17})^2 \quad B = 73$

$\overline{88}\,\overline{88}\,4\,4 + (\overline{89}\,\overline{89})^2 \quad 4\,4\,\overline{88}\,\overline{88} = (\overline{19}\,\overline{19})^2 \quad B = 91$

$\overline{63}\,\overline{63}\,\overline{19}\,\overline{19} = (\overline{71}\,\overline{71})^2 \quad \overline{19}\,\overline{19}\,\overline{63}\,\overline{63} = (\overline{39}\,\overline{39})^2 \quad B = 81$

N. B. 1°. Dans ceux des carrés où $b=4$, a et c sont *consécutifs*, et $a = B - 3$. La forme générale de ces carrés est, en effet,

$$N = \overline{B-3}\,\overline{B-3}\,4\,4 = (\overline{B-2}\,\overline{B-2})^2,$$

$$M = 44\,\overline{B-3}\,\overline{B-3} + (\overline{2\alpha+1}\,\overline{2\alpha+1})^2,$$

où

$$(2\alpha+1)^2 = 4B - 3.^{2)}$$

2°. Le quatrième carré est de la forme $aaaa = (cc)^2$.

V. THÉBAULT
(LE MANS, FRANCE)

11. — *Sur une méthode donnant une infinité de solutions numériques de l'équation diophantienne*

$$x^2 + a y^2 = x'^2 + b y'^2,$$

a et b étant des nombres impairs non carrés.

Posons

$$a = 2k+1 = (k+1)^2 - k^2; \quad b = 2l+1 = (l+1)^2 - l^2.$$

L'équation proposée se transforme en :

$$x^2 + [(k+1)y]^2 - (ky)^2 = x'^2 + [(l+1)y']^2 - (ly')^2$$

$$(1)\quad x^2 + [(k+1)y]^2 + (ly')^2 = x'^2 + [(l+1)y']^2 = (ky)^2$$

Une solution générale de l'équation :

$$x^2 + Y^2 + Z^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2,$$

est donnée par les formules :

$$\begin{cases} x = r^2 - mn - pq \\ Y = (m+n)r \\ Z = (p+q)r \end{cases} \qquad \begin{cases} x' = r^2 + mn + pq \\ Y' = (m-n)r \\ Z' = (p-q)r, \end{cases}$$

les paramètres r, m, n, p et q étant arbitraires.

²) *V. Thébault*, loc. cit.

Pour l'équation (1) nous avons, en outre, les conditions :

$$\begin{cases} ky = (k+1)z' \quad \text{et} \\ ly' = (l+1)z, \end{cases}$$

qui deviennent :

$$\begin{cases} m+n = \dfrac{k+1}{k}(p-q) \\ m-n = \dfrac{l+1}{l}(p+q) \end{cases}$$

d'où :

$$m = \frac{(k+1)(p-q)}{2k} + \frac{(l+1)(p+q)}{2l}$$

$$n = \frac{(k+1)(p-q)}{2k} - \frac{(l+1)(p+q)}{2l}.$$

Prenons

$$p - q = 2kt, \quad p + q = 2ls,$$

il vient :

$$m = (k+1)t + (l+1)s; \quad n = (k+1)t - (l+1)s;$$

$$\begin{cases} x = r^2 - mn - pq \\ y = \dfrac{z'}{k} = \dfrac{(p-q)r}{k} = 2tr \end{cases}$$

$$\begin{cases} x' = r^2 + mn + pq \\ y' = \dfrac{z}{l} = \dfrac{(p+q)r}{l} = 2sr. \end{cases}$$

ou,

$$x = r^2 - (k+1)^2 t^2 + (l+1)^2 s^2 - l^2 s^2 + k^2 t^2,$$

et,

$$x = r^2 - a t^2 + b s^2, \qquad x' = r^2 + a t^2 - b s^2,$$

$$y = 2rt, \qquad y' = 2rs.$$

Ci, les paramètres r, s, t, sont arbitraires ; a et b sont les coéfficients figurant dans l'équation donnée.

Exemples. 1. $x^2 + 5y^2 = x'^2 + 7y'^2$.

r	s	t	
1	1	3	$37^2 + 5.6^2 = 39^2 + 7.2^2 \; (= 1549)$
2	2	3	$13^2 + 5.12^2 = 21^2 + 7.8^2 \; (= 889)$
1	2	2	$9^2 + 5.4^2 = 7^2 + 7.4^2 \; (= 161)$

2. $x^2 + 7y^2 = x'^2 + 11y'^2$

r	s	t	
1	1	3	$51^2 + 7.6^2 = 53^2 + 11.2^2 \; (= 2853)$
2	2	3	$15^2 + 7.12^2 = 23^2 + 11.8^2 \; (= 1233)$
1	2	2	$17^2 + 7.4^2 = 15^2 + 11.4^2 \; (= 401)$.

Remarque. Si, dans la solution générale de l'équation $x^2+y^2+z^2=x'^2+y'^2+z'^2$, on permute y' et z', on trouve les conditions supplémentaires:

$$k(m+n)=(k+1)(m-n)$$
$$l(p-q)=(l+1)(p+q),$$

d'où:

$$m=(2k+1)n=an;\quad p=-(2b+1)q=-bq.$$

On trouve donc:

$$\begin{cases} x=r^2-an^2+bq^2 \\ y=\dfrac{z'}{k}=\dfrac{(m-n)r}{k}=\dfrac{(a-1)nr}{k}=2nr \end{cases}$$

$$\begin{cases} x'=r^2+an^2-bq^2 \\ y'=\dfrac{z}{l}=\dfrac{(p+q)r}{l}=q\dfrac{(-b+1)r}{l}=-2qr. \end{cases}$$

En remplaçant n par t, q par s, et, en prenant y' avec le signe +, nous avons la même solution que plus haut.

A. GLODEN
(Luxenbourg)

BIBLIOGRAFIE

1. *Gazeta Matematică*, anul XLII, No. 10, Iunie 1937. Rezultatul Concursului „Gazetei Matematice", de *G. Țițeica*. Două aritmetici vechi anonime, de *Victor Marian*. Relațiuni între suprafețe de triunghiuri, de *R. Goormaghtigh*. Din geometria triunghiului, de General *Gh. I. Popescu*. *G. Asachi* și postulatul lui *Euclid*, de *Ilie Popa*. Raport pentru decernarea premiului „*V. Cristescu*", de *Al. Bunescu, Ion Ionescu, Alexandru V. Niculescu*. Note matematice. Bibliografie. Cereri. Diverse. Probleme rezolvate și propuse.

2. *Știință și Progres*. Revista științifică a liceelor militare, anul IV, N-rile 3–4, lunie 1937. Asupra unor proprietăți ale seriilor cu termeni pozitivi, de Prof. *G. G. Constantinescu*. O chestiune de examen, de *N. M.* Săptămâna matematică la Cluj, de Prof. *A. A. Viciu*. Două substanțe ferromagnetice noui, de *Victor Marian*. Enigma stelelor temporale (urmare), de Prof. *G. G. Constantinescu*. Viața și opera lui *Galileu*, de *Georgescu Ilarian*. Note și Informațiuni. Publicații noui. Probleme rezolvate și propuse.

3. *G. G. Constantinescu*. Sur certaines classes d'intégrales abéliennes Extrait de Mathesis, t. LI.

PROBLEME REZOLVATE

299. — *Să se afle cel mai mare divizor comun și cel mai mic multiplu comun al polinoamelor*

$$P(x)=x^6+x^5-10x^4+6x^3+8x^2-2x+4$$
$$Q(x)=2x^5-6x^4+7x^3-13x^2+18x-8$$

M. VASILIU

Enunțul problemei conține erori în transcrierea coeficienților, căci rezultatul este fără interes. Aplicând metoda generală pentru astfel de probleme se găsește că cel mai mare comun divizor este 1 și cel mai mic multiplu comun este produsul $P(x)\times Q(x)$ căci $P(x)$ și $Q(x)$ nu au divizori comuni.

S-au ocupat de problemă și au ajuns la acest rezultat d-nii: *C. Berdan, C. T. Ionescu-Bujor* și *P. C. Tărăbuță*.

D-l *C. T. Ionescu-Bujor* a înlocuit pe $P(x)$ prin

$$P_1(x)=x^6+x^5-10x^4+6x^3+4x^2-2x+4$$

și a găsit că c. m. m. d. c. al lui $Q(x)$ și $P_1(x)$ este $x-2$.

Câți-va corespondenți au observat că

$$Q(x)=(x-1)(x-2)(2x^3+3x-4)$$

și au dedus că de oare ce $P(x)$ nu se divide cu $(x-1)(x-2)$, iar

$$M(x)=2x^3+3x-4=0$$

are 2 rădăcini imaginare, $P(x)$ și $Q(x)$ nu au divizori comuni. Această constatare nu este suficientă, autorii trebuiau să *dovedească* că factorii imaginari ai lui $M(x)$ nu sunt divizori ai lui $P(x)$.

1523. — *Să se rezolve sistemul:*

$$\begin{cases} \sqrt{x+y+2\sqrt{xy}}=a^2 \\ \sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{y}+\sqrt[8]{16xy}=b, \end{cases}$$

știind că $a^2+b^2=2bc$.

MARCEL F. AMARASTEANU

Observând că prima ecuație se poate scri,

$$\sqrt{x}+\sqrt{y}=a^2,$$

și efectuând substituția:

$$(1)\qquad \begin{cases} \sqrt[4]{x}=u \\ \sqrt[4]{y}=v, \end{cases}$$

sistemul dat devine:

$$(2)\qquad \begin{cases} u^2+v^2=a^2 \\ u+v+\sqrt{2uv}=b. \end{cases}$$

A 2-a ecuaţie a acestui sistem se mai poate scri:

$$(u+v-b)^2=2uv,$$

sau:

$$u^2+v^2+b^2-2b(u+v)+2uv=2uv.$$

Simplificând şi observând prima ecuaţie din (1), această ultimă ecuaţie se poate scri:

$$a^2+b^2=2b(u+v). \tag{3}$$

Cum $a^2+b^2=2bc$ prin ipoteză, ecuaţia (3) devine:

$$u+v=c,$$

astfel că sistemul (2) este echivalent cu următorul:

$$\begin{cases} u^2+v^2=a^2 \\ u+v=c. \end{cases} \tag{4}$$

Ridicând a 2-a ecuaţie din (4) la patrat şi scăzând prima, găsim:

$$uv=\frac{c^2-a^2}{2}.$$

Sistemul (4) este astfel echivalent cu sistemul:

$$\begin{cases} u+v=c \\ uv=\dfrac{c^2-a^2}{2} \end{cases} \tag{5}$$

u şi v sunt rădăcinele ecuaţiei de gradul al 2-lea:

$$z^2-cz+\frac{c^2-a^2}{2}=0,$$

sau:

$$2z^2-2cz+c^2-a^2=0.$$

Rezolvând această ecuaţie, găsim

$$\begin{cases} u=\dfrac{c+\sqrt{2a^2-c^2}}{2} \\ v=\dfrac{c-\sqrt{2a^2-c^2}}{2}, \end{cases}$$

sau invers.

Revenind la substituţia (1), şi înlocuind pe u şi v cu valorile găsite, obţinem pentru sistemul dat, următoarele sisteme de soluţii:

$$\begin{cases} x=\left(\dfrac{c\pm\sqrt{2a^2-c^2}}{2}\right)^4 \\ y=\left(\dfrac{c\mp\sqrt{2a^2-c^2}}{2}\right)^4 \end{cases}$$

Observare. Când am extras rădăcina patrată din prima ecuaţie, am lasat la o parte relaţia: $\sqrt{x}+\sqrt{y}=-a^2$, care n'a intrat în intenţia autorului, observând relaţia $a^2+b^2=2bc$.

Ecuaţia $\sqrt{x}+\sqrt{y}=-a^2$, a fost luată în consideraţie de d-l *Negrea A. Leonte* (Brăila).

Soluţii date de d-nii: *Cazanacli V. Petre* (Chişinău), *Cioc I. D-tru* (lic. Milit, Roman), *Kornis Ernest* (lic. Loga, Timişoara), *Matei D. D-tru* (lic. Internat, Iaşi), *Milu I. Nicolae* (Şc. Pregăt. de Ofiţeri), *Negrea A. Leonte-Mircea* (Brăila), *Popoviciu I. Gavril*, *Ripianu Andrei* (Cluj), *Tilică Ştefan* (lic. T-Severin) şi *Ţarălungă D-tru*.

1524. — *Să se rezolve sistemul:*

$$\begin{cases} x^4y+8xy^4=32 \\ (x+2y)^2-6xy=4 \end{cases}$$

SUB-LT MIRCEA GRUMAZESCU

Sistemul dat se mai poate scri:

$$\begin{cases} xy(x^3+8y^3)\equiv xy(x+2y)(x^2-2xy+4y^2)=32 \\ x^2-2xy+4y^4=4. \end{cases} \tag{1}$$

Prima ecuaţie, ţinând seamă de a 2-a se simplifică, astfel că sistemul (2) devine:

$$\begin{cases} xy(x+2y)=8 \\ (x+2y)^2-6xy=4. \end{cases} \tag{2}$$

Din prima ecuaţie din (2), avem:

$$xy=\frac{8}{x+2y} \tag{3}$$

valoare pe care înlocuind'o în a 2-a ecuaţie din (2), obţinem:

$$(x+2y)^2-\frac{48}{x+2y}=4,$$

sau:

$$(x+2y)^3-4(x+2y)-48=0. \tag{4}$$

Observând, că primul membru se anulează pentru $x+2y=4$, el se divide prin $x+2y-4$, astfel că ecuaţia (4) se mai poate scri:

$$(x+2y-4)[(x+2y)^2+4(x+2y)+12]=0.$$

De aci deducem:

$$x+2y=4,$$

$$x+2y=-2\pm\sqrt{-8}=-2(1\mp i\sqrt{2}).$$

Introducând aceste valori în relaţia (3), obţinem valorile corespunzătoare pentru xy, astfel că sistemul dat este echivalent cu următoarele:

$$(5)\qquad \begin{cases} x+2y=4 \\ xy=2 \end{cases}$$

$$(6)\qquad \begin{cases} x+2y=-2(1\mp i\sqrt{2}) \\ xy=\dfrac{-4}{1\mp i\sqrt{2}}=\dfrac{-4(1\pm i\sqrt{2}}{3}. \end{cases}$$

Rămâne să rezolvăm aceste sisteme.

Dacă din prima ecuaţie din (5) ridicată la patrat scădem ecuaţia 2-a multiplicată cu 8, obţinem:

$$(x-2y)^2=0 \qquad \text{deci:} \qquad x-2y=0.$$

Procedând la fel cu sistemul (6), avem

$$(x-2y)^2=4(-1\mp 2i\sqrt{2})+\frac{32(1\pm i\sqrt{2})}{3}$$

$$=\frac{4(5\mp 6i\sqrt{2}\pm 8i\sqrt{2})}{3}.$$

De aci deducem:

$$x-2y=2\sqrt{\frac{5\pm 2i\sqrt{2}}{3}}=\frac{2}{3}\sqrt{15\pm 6i\sqrt{2}}.$$

Sistemele (5) şi (6) sunt astfel echivalente cu următoarele sisteme:

$$(5')\qquad \begin{cases} x+2y=4 \\ x-2y=0, \end{cases}$$

$$(6')\qquad \begin{cases} x+2y=-2(1\mp i\sqrt{2} \\ x-2y=\dfrac{2}{3}\sqrt{15\pm 6i\sqrt{2}}. \end{cases}$$

Prin adunare şi scădere obţinem următoarele sisteme de soluţii pentru sistemul dat:

$$\begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x=\dfrac{-3(1\mp i\sqrt{2})+\sqrt{15\pm 6i\sqrt{2}}}{3} \\ y=\dfrac{-3(1\mp i\sqrt{2})-\sqrt{15\pm 6i\sqrt{2}}}{6} \end{cases}$$

Soluţii date de d-nii: *Amărăşteanu F. Marcel* (Şc. Polit., Bucureşti), *Andrievici N.* (lic. Milit., N. Filipescu), *Andrunachievici Vladimir* (student, Iaşi), *Cazanacli V. Petre* (Chişinău), *Cioc I. D-tru* (lic. Milit., Craiova), *Diaconescu Marcel* (lic. Milit, N. Filipescu), *Florescu L. Victor* (lic. Milit, N. Filipescu), *Jidanu I. C-tin* (lic. Beiuş), *Kornis Ernest* (lic. Loga, Timişoara), *Lupescu Gh. Corneliu* (Şc. Of. de Artilerie), *Matei D. D-tru* (lic. Internat, Iaşi), *Moisovici Ştefan* (bacalaureat), *Negrea A. Mircea* (Brăila), *Ripianu Andrei* (Cluj), *Staicu I. N.*, (lic. Milit., N. Filipescu), *Steţănescu D. Nicolae* (lic. Milit., N. Filipescu), *Stoenescu D. Mirel* (lic. Milit., N Filipescu), *Tilică C. Ştefan* (lic. T-Severin), *Ţarălungă N. D-tru* (bacalaureat, Tg-Mureş) şi *Vlad I. C. M.* (Sub-Lt).

1540. — *Să se stabilească identitatea:*

$$\left(\frac{a+b+c+d}{b+d}\right)^4-\left(\frac{a-b+c-d}{b+d}\right)^4$$

$$=8\left(\frac{a+c}{b+d}\right)^3+8\left(\frac{a+c}{b+d}\right)$$

MARCEL F. AMARASTEANU

Notând:

$$\frac{a+c}{b+d}=A,$$

identitatea dată se reduce la următoarea:

$$(1)\qquad (A+1)^4-(A-1)^4=8A^3+8A.$$

Rămâne să stabilim această identitate

Observăm că:

$$(A+1)^4-(A-1)^4=$$

$$[(A+1)^2-(A-1)^2][(A+1)^2+(A-1)^2]=$$

$$4A(2A^2+2)=8A^3+8A.$$

Identitatea (1), deci şi cea dată, este stabilită.

Soluţii date de d-nii: *Andrievici N.* (lic. Milit, N. Filipescu), *Buznea D. Dinu* (lic. Milit., N. Filipescu), *Deciulescu Gheorghe*, *Kornis Ernest* (lic. Loga, Timişoara), *Matei D. D-tru* (lic. Internat, Iaşi), *Negrea M.* (Brăila), *Rădulescu Gh. Octavian* (lic. Milit, N. Filipescu), *Segal Zoe* (Bucureşti), *Staicu I. Nicolae* (lic. Milit, N. Filipescu), *Stamate I Ionel* (lic. Lugoj), *Stoenescu D. Mircel* (lic. Milit., N. Filipescu), *Tica P. Marin-Gall*, (Sub-Lt), *Theodorescu Dorin* (lic. Milit., N. Filipescu) şi *Zagaican Ilie* (Conductor de L. P.)

Alte soluţii date de d-rele: *Grittia Livia* (lic. Constanţa), *Comloşan Cornelia* (Cluj) şi de d-nii: *Anastasiu M. Mihail* (lic. Milit., N. Filipescu), *Apostol V. Radu* (lic. Milit., N. Filipescu), *Babeţiu T. Corneliu* (lic. Loga, Timişoara), *Belloiu B. D-tru* (lic. Milit., N. Filipescu), *Berinde L. Titus* (lic. Lugoj), *Cazanacli V. Petre* (Chişinău), *Diaconescu Marcel* (lic. Milit., N. Filipescu), *Florescu L. Victor* (lic. Milit, N. Filipescu), *Lăzărescu Stelian* (lic. Milit., N. Filipescu), Timişoara), *Medeleanu Ion*, *Milu I. Nicolae* (Şc. Preg. de Ofiţeri), *Petrescu P. Ioan Benone* (lic. Milit., N. Filipescu), *Popescu Zorica N. Alexandru* (lic. Iosif, Bucureşti), *Rohr I. Alexandru* (lic. Milit., Cernăuţi), *Sava I. Victor* (lic. Internat, Iaşi), *Ştefănescu Costin* (lic. Militar, N. Filipescu), *Ştefănescu D. Nicolae* (lic. Milit., N. Filipescu), *Tatomir M. Gh.* (lic. Milit., N. Filipescu), *Tilica C. Ştefan* (lic. T-Severin), *Ţarălungă N. D-tru* (bacalaureat) şi *Vlad I. C. M.* Sub-Lt).

Observare. O soluţie primită, în care s'a făcut numai verificarea pentru $a=b$, $c=d$, n'a fost luată în consideraţie.

1551. — *Dacă a, b, c sunt respectiv ipotenuza şi catetele unui triunghiu dreptunghiu, să se demonstreze că una din rădăcinele ecuaţiei*

$$2bcx^3-2a(b+c+bc)x^2+a^2(2b+2c+1)x-a^3=0,$$

este:

$$x=\frac{a}{a+b+c}.$$

V. ALACI

Pentru $x=a$, primul membru al ecuaţiei devine:

$$a^3[2bc-2(b+c+bc)+2b+2c+1-1].$$

Factorul din paranteza mare este identic nul, astfel că primul membru al ecuaţiei se divide prin $x-a$ şi efectuând diviziunea, găsim că ecuaţia dată se mai poate scri:

$$(x-a)[2bcx^2-2a(b+c)x+a^2]=0.$$

Rădăcinele acestei ecuaţiuni sunt:

$$x_1=a, \quad x_{2,3}=\frac{a(b+c)\pm\sqrt{a^2(b+c)^2-2a^2bc}}{2bc}$$

$$=\frac{a[b+c\pm\sqrt{b^2+c^2}]}{2bc}.$$

Cum prin ipoteză, (1) $b^2+c^2=a^2$, căci triunghiul este dreptunghiu, rezultă

$$x_{2,3}=\frac{a(b+c\pm a)}{2bc}.$$

Dacă luăm rădăcina x_3, observăm că ea se mai poate scri succesiv:

$$x_3=\frac{a(b+c-a)}{2bc}=\frac{a(b+c-a)(b+c+a)}{2bc(b+c+a)}=$$

$$\frac{a[(b+c)^2-a^2]}{2bc(a+b+c)}=\frac{a(b^2+c^2+2bc-a^2)}{2bc(a+b+c)}.$$

In virtutea aceleiaşi relaţii (1), putem scri încă:

$$x_3=\frac{a(a^2+2bc-a^2)}{2bc(a+b+c)}=\frac{a}{a+b+c}.$$

Deci una din rădăcinele ecuaţiei date, este aceea din enunţ.

Soluţii găsite de d-nii: *Amărăşteanu F. Marcel* (student, Bucureşti), *Andrunachievici Al. Vladimir* (student, Iaşi), *Anton C. George* (lic. Bistriţa), *Belloiu B. D-tru* (lic. Milit., N. Filipescu), *Negrea A. Mircea* (Brăila), *Pompeiu Marica* (lic. Beiuş), *Ripianu Andrei* (Cluj), *Rusu Liviu*, *Stefănescu Costin* (lic. Milit., N. Filipescu) şi *Tica P. Marin*.

1552. — *Să se arate că:*

$$\operatorname{arc\,tg}\frac{x+\sqrt{x^2-32}}{4}+\operatorname{arc\,tg}\frac{x-\sqrt{x^2-32}}{4}+$$

$$+\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{2}=\text{mult. }\pi.$$

Caz particular $x=6$, $x=9$.

N. N. MIHAILEANU

Notăm:

$$\begin{cases} a=\operatorname{arc\,tg}\dfrac{x+\sqrt{x^2-32}}{4} \\ b=\operatorname{arc\,tg}\dfrac{x-\sqrt{x^2-32}}{4} \\ c=\operatorname{arc\,tg}\dfrac{x}{2}, \end{cases}$$

deci:

$$(1)\quad \begin{cases} \operatorname{tg}a=\dfrac{x+\sqrt{x^2-32}}{4} \\ \operatorname{tg}b=\dfrac{x-\sqrt{x^2-32}}{4} \\ \operatorname{tg}c=\dfrac{x}{2}. \end{cases}$$

De aci rezultă că relaţia din enunţ devine

$$a+b+c=\text{mult. }\pi,$$

sau:

$$(2)\qquad \operatorname{tg}(a+b+c)=0,$$

relaţie pe care trebuie s'o stabilim, ţinând seamă de relaţiile (1).

Cum avem cunoscută relaţia

$$\operatorname{tg}(a+b+c)=\frac{\operatorname{tg}a+\operatorname{tg}b+\operatorname{tg}c-\operatorname{tg}a\operatorname{tg}b\operatorname{tg}c}{1-\operatorname{tg}a\operatorname{tg}b-\operatorname{tg}b\operatorname{tg}c-\operatorname{tg}c\operatorname{tg}a},$$

mai putem scri în virtutea relaţiilor (1):

$$\operatorname{tg}(a+b+c)=\frac{\dfrac{x+\sqrt{x^2-32}}{4}+\dfrac{x-\sqrt{x^2-32}}{4}+\dfrac{x}{2}-\dfrac{x+\sqrt{x^2+32}}{4}\cdot\dfrac{x-\sqrt{x^2-32}}{4}\cdot\dfrac{x}{2}}{1-\left(\dfrac{x+\sqrt{x^2-32}}{4}\right)\left(\dfrac{x-\sqrt{x^2-32}}{4}\right)-\left(\dfrac{x-\sqrt{x^2-32}}{4}\right)\dfrac{x}{2}-\dfrac{x}{2}\left(\dfrac{x+\sqrt{x^2-32}}{4}\right)}=$$

$$\frac{x-x}{1-2-\frac{x^2}{4}} \equiv 0.$$

Relaţia (2), deci şi cea din enunţ este stabilită.

In cazul particular $x=6$, relaţia dată devine:

$$\text{artg } 2 + \text{artg } 1 + \text{arctg } 3 = \text{mult. } \pi,$$

sau:

$$\text{arctg } 2 + \text{arctg } 3 = \text{mult. } \pi - \frac{\pi}{4}.$$

Luând tangenta în ambii membrii, avem:

$$\frac{2+3}{1-2.3} = -\operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = -1,$$

ceeace este evident.

In cazul $x=9$, avem:

$$\operatorname{arc\,tg}\, 4 + \operatorname{arctg}\frac{1}{2} + \operatorname{arc\,tg}\frac{9}{2} = \text{mult. } \pi.$$

Luând tangenta în ambii membrii, avem:

$$\frac{4+\frac{1}{2}+\frac{9}{2}-4\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{9}{2}}{1-2-\frac{9}{4}-18} = 0,$$

ceiace este iarăşi evident.

Soluţii date de d-nii: *Amărăşteanu F. Marcel* (Şc. Polit., Bucureşti), *Anton C George* (lic. Bistriţa), *Apostol V. Radu* (lic. Milit., N. Filipescu), *Cozanacli V. Petre* (Chişinău), *Lăzărescu P. Stelian* (lic. Milit, N. Filipescu), *Milu I. Nicolae* (Şc. Preg. de Ofiţeri), *Negrea A. Mircea* (Brăila), *Stefănescu Costin* (lic. Milit, N. Filipescu), *Stefănescu D. Nicolae* (lic. Milit, N. Filipescu) şi *Zagaican Ilie* (Conductor de L. P.)

PROBLEME PROPUSE

1594. — Un număr de forma $8n+3$ se poate, cel puţin într'un fel, descompune într'o sumă de trei patrate.

A. Gloden

1595. — Să se găsească condiţiile necesare şi suficiente pentru ca fracţiunile

$$\frac{na-1}{(n+1)a+1} \quad \text{şi} \quad \frac{na+1}{(n+1)a-1}$$

să fie ireductibile.

V. Tébhault

1596. — Fie două drepte D şi D_1 în acelaş plan, trei puncte fixe A, B, C pe dreapta D şi un punct mobil M pe dreapta D_1. Paralele duse prin C la AM şi BM intersectează respectiv pe BM şi AM în punctele P şi R, care descriu drepte paralele cu D_1.

Intersecţia dreptelor CM şi PR descrie o dreaptă deasemenea paralelă cu dreapta D_1.

L-t. C. Ionescu-Ţiu

1597. — Se dă un patrat ABCD de latură a. Pe latura $\overline{AB}$ se construeşte un triunghiu echilateral ABM. In A şi B se ridică perpendiculare respectiv pe DM şi CM, care se întâlnesc în punctul S. Să se arate:

1°. Că patrulaterul BMSC este un romb.

2°. Că suprafaţa rombului este $\frac{a^2}{2}$.

Sub-Lt M. C. I. Vlad

1598. — Să se rezolve sistemul:

$$(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2 = 24$$
$$(x+y)(y+z)(z+x) = 192$$
$$(x+y)^2+(y+z)^2+(z+x)^2 = 116.$$

Sub Lt Mircea Grumazescu

1599 — Să se calculeze valoarea determinanţilor:

$$D_4 = \begin{vmatrix} a & 1 & 0 & 1 \\ 1 & a & 1 & 0 \\ 0 & 1 & a & 1 \\ 1 & 0 & 1 & a \end{vmatrix}, \qquad D_4 = \begin{vmatrix} a & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & a & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & a & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & a \end{vmatrix}$$

Gh. Simionescu

1600. — Să se stabilească identităţile:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\sin k \cdot 36^0}{\sin(36^0-\alpha)} = \frac{5\sin 4\alpha}{\sin 5\alpha},$$

$$\prod_{k=1}^{4} \frac{\sin k \cdot 36^0}{\sin(36^0-\alpha)} = \frac{5\sin\alpha}{\sin 5\alpha}$$

V Alaci

1601. — Dacă A, B, C sunt unghiurile unui triunghiu şi dacă

$$\operatorname{cotg}\omega = \operatorname{cotg} A + \operatorname{cotg} B + \operatorname{cotg} C,$$

să se arate că:

$$\frac{\sin B \sin\omega}{\sin A} = \frac{\sin C \sin(B-\omega)}{\sin B}$$

N. N. Mihaileanu

OBSERVARE. In problema 1592 se va înlocui b^2 prin b^3.

Manuscrise primite de la corespondenții noștrii până la 10 a lunei curente și anume: Articole (A), Note (N), probleme propuse (P) și probleme rezolvate indicate prin numărul lor de ordine.

Andonie Șt. Mihai (1574, 1580, 1584); *Czijak Vasile* (P); *Gloden A.* (P); *Jidanu I. C-tin* (P., 1555); *Matei D tru* P , 1573, 1579, 1580, 1584, 1585, 1587, 1592); *Ripianu Andrei* (P., 1581); *Staicu I.* N. (P., 1579); *Stamate I. Ionel* (1562, 1574); *Stefănescu D. Nicolae* (1562, 1569, 1579, 1580, 1583, 1584, 1585).

INFORMAȚIUNI

La Redacțiunea „Revistei Matematice din Timișoara" se primesc abonamente pentru:

BOLETIN MATEMATICO

ANUL AL X-LEA

care a început în Martie 1937.

Costul *special* a unui abonament este de 200 lei.

Această Revistă se publică în Buenos-Aires, Republica Argentina.

Pentru anul al X-lea care a începe în Martie 1937, s'au primit până acum la Redacția „R. M. T." următoarele abonamente:

1. Locotenent *Costăchescu Constantin,* Distrugătorul *„Regina Maria"*, Constanța.
2. Profesor *I. Nemet,* Casa învățătorilor, str. Remus, Timișoara.
3. Dr. *Teofil Vescan,* Calea Regele Ferdinand, 110, Cluj.
4. Profesor *Spiridon Ghițescu,* liceul de băeți din Mizil.
5. Student *Nichita Bododea,* Bulevardul Al. I. Cuza No. 27, București.
6. Prof. *Sergescu P.,* Universitatea, Cluj.

Răspundem pe această cale, la toți acei corespondenții, care se plâng că anumite probleme nu le-au fost considerate, că aceasta se datorește sau faptului că acele soluțiuni au sosit întârziate, sau au fost greșite, sau n'au sosit de loc.

Evident că astfel de probleme nu pot fi luate, în seamă.

Legându-se colecția R. M. T., anul XV, în volum și rămânând numere răzlețe care nu au putut fi legate, putem trimete corespondenților noștri numere care eventual le lipsesc din colecție în schimbul sumei de 10 lei. Doritorii se vor adresa administrației revistei, trimițând suma prin mandat poștal.

Rugăm călduros pe corespondenții noștrii să facă cunoscut această REVISTĂ colegilor și camarazilor lor.

Figurile ce însoțesc soluțiile problemelor, notelor și articolelor, trebuesc desemnate cu îngrijire pe foi albe (neliniate) și de e posibil în tuș.

SPHINX

Revue mensuelle des questions récréatives

FONDÉE EN 1931

REVUE UNIQUE DANS SON GENRE
dans le monde entier

ABONNEMENTS:
1 an: Belgique, **30 fr.** France, **25 fr.**
Etranger, 7 **belgas**.

Administration:
SPHINX, Bruxelles 173, Avenue Longchamp

Toți cei ce ne trimet articole, note, probleme propuse sau rezolvate, pentru a fi luate în considerație, sunt obligați a fi abonați la Revista Matematică din Timișoara.

Anunțăm că nu vom mai lua în considerare problemele rezolvate, iscălite de mai mulți corespondenți. Fiecare corespondent trebue să-și redacteze problema rezolvată de el, și s'o iscălească.

Fiecare problemă rezolvată, notă sau articol trebuesc scrise pe sferturi de coale de hârtie și însoțite de enunț. Problemele propuse trebuesc însoțite și de soluțiile lor.

Fiecare problemă rezolvată trebuie să fie scrisă aparte și să nu se continue cu alte probleme, căci nu se pot repartiza la numerile corespunzătoare, deci nu pot fi luate în seamă.

Se găsesc broșate colecțiile R. M. T. din anii II — XVI, cu prețul de lei 120 volumul și se trimet la cerere.

ANUL XVII. 15 AUGUST 1937 No. 6.

REVISTA MATEMATICĂ
DIN
TIMIȘOARA

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA APARE ODATA PE LUNA.
PREȚUL UNUI NUMAR 12 LEI PREȚUL ABONAMENTULUI 100 LEI PE AN.

CUPRINSUL

1 EUGEN VIȘA: DOUA TEOREME RELATIVE LA TEORIA DIFERENTELOR.
2. NOTE MATEMATICE: 12, 13, 14.
3. BIBLIOGRAFIE.
4. PROBLEME REZOLVATE: 667, 1509, 1518, 1522, 1529, 1535, 1537, 1538.
5. PROBLEME PROPUSE: 1602-1609.
6. INFORMATIUNI.

TIMISOARA
Institut de Arte grafice Tipografia Românească

„Orice profesor de matematici, din orice colţ al ţării şi de la orice şcoală, trebuie să fie apostol al specialităţii sale. Din felul cald şi luminos cum îşi face lecţiile, din drumul drept şi demn pe care îl urmează în viaţă, trebuie să apară limpede că judecata matematică precisă şi sigură, curată ca cristalul, are o înaltă şi admirabilă valoare educativă pentru viaţă.

Adevărul curat, adevărul drept, adevărul luminos, să fie îndreptarul vieţei noastre. Aceasta să fie contribuţia specialităţii noastre la îndrumarea neamului românesc, pe calea care-i stă deschisă".

G. ŢIŢEICA

Manuscrisele destinate Revistei Matematice din Timişoara conţinând soluţiunile problemelor propuse şi probleme, note sau articole originale vor fi trimise pe adresa: **V. Alaci,** profesor Şcoala Politechnică, Timişoara.

Plata abonamentului precum şi reclamaţiunile de neprimirea Revistei vor fi adresate d-lui **Prof. C. Teodorescu,** Rectorul Şcoalei Politechnice din Timişoara.

Plata abonamentului se face prin CEC (Casa de economii şi cecuri postale. unde revista are contul CEC No. 85208, sau prin mandat postal adresat d-lui Prof. C. TEODORESCU, Rectorul Şcoalei Politechnice din Timişoara.

Taxa de Membru în „Comitetul de Conducere al Revistei Matematice din Timişoara" este pentru anul XVII, de 200 (două sute) lei.

Colecţia R. M. T., se găseşte la Administraţia Revistei, şi se poate procura în schimbul preţului:

Anul I, epuizat. Anii: II—XVI inclusiv, broşate, 120 lei fiecare.

ANUL XVII — No. 6 TIMISOARA, 15 AUGUST 1937

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA

APARE LA 15 A FIECAREI LUNI

PREȚUL UNUI NUMAR . . . . . 12 LEI
ABONAMENT ANUAL . . . . . 100 LEI
Abonamentele sunt socotite totdeauna dela 15 Martie

REDACȚIA: Prof. V. ALACI
Școala Politechnică din Timișoara.
ADMINISTRAȚIA: Prof. C. TEODORESCU
Rectorul Școalei Politechnice din Timișoara.

DOUĂ TEOREME RELATIVE LA TEORIA DIFERENȚELOR

de EUGEN VIȘA
Profesor, Blaj.

Este cunoscută noțiunea de *diferență* ce se atașează unei funcțiuni sau unui șir numeric.

In particular, pentru cazul unui șir de numere:

(1) $$a_0,\ a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n,\ \ldots$$

reamintesc că se numește diferență de ordinul k a unui termen oarecare a_n, al acestui șir expresia $\Delta^k a_n$ definită prin relația de recurență:

(2) $$\Delta^k a_n = \Delta^{k-1} a_{n+1} - \Delta^{k-1} a_n$$

și prin condiția inițială:

(3) $$\Delta^0 a_n = a_n .$$

Scopul ce urmăresc prin acest articol este de a pune în evidență două teoreme remarcabile relative la teoria diferențelor.

Teorema I. *Diferența de ordinul k a termenului de rang n din șirul* (1) *se exprimă prin relația:*

(I) $$\boxed{\Delta^k a_n = \sum_{\alpha=0}^{\alpha=p} (-1)^\alpha C_p^\alpha \Delta^{k-p} a_{p+n-\alpha}}\ ,\ (p \leq k)$$

unde simbolul C_p^α *reprezintă numărul combinărilor de p obiecte luate câte* α.

Pentru demonstrarea acestei relații voiu proceda prin inducție completă.

In primul rând avem de observat că această relație se verifică pentru $p=0$ *și* $p=1$.

Intr' adevăr, pentru aceste valori ale lui p relația (I) se reduce respectiv la identitatea:

$$\Delta^k a_n = \Delta^k a_n$$

și la relația de definiție (2).

Presupunând acum că relația (I) este adevărată pentru un p oarecare, să arătăm că ea are loc și pentru $p+1$.

Pentru aceasta înlocuim în relația (2) pe k prin $k-p$, iar pe n prin $p+n-\alpha$ și avem:

(4) $$\Delta^{k-p} a_{p+n-\alpha} = \Delta^{k-p-1} a_{p+1+n-\alpha} - \Delta^{k-p-1} a_{p+n-\alpha}.$$

Ținând seamă de relația (4), relația (I) devine:

$$\Delta^k a_n = \sum_{\alpha=0}^{\alpha=p} (-1)^\alpha C_p^\alpha \Delta^{k-p-1} a_{p+1+n-\alpha} + \sum_{\alpha=0}^{\alpha=p} (-1)^{\alpha+1} C_p^\alpha \Delta^{k-p-1} a_{p+n-\alpha},$$

ceeace se mai scrie și sub forma:

(5) $$\Delta^k a_n = \sum_{\alpha=0}^{\alpha=p} (-1)^\alpha C_p^\alpha \Delta^{k-p-1} a_{p+1+n-\alpha} + \sum_{\alpha=1}^{\alpha=p+1} (-1)^\alpha C_p^{\alpha-1} \Delta^{k-p-1} a_{p+1+n-\alpha}$$

și cum

$$C_p^\alpha = C_{p+1}^\alpha - C_p^{\alpha-1},$$

relația (5) la rândul său devine:

(6) $$\Delta^k a_n = \sum_{\alpha=0}^{\alpha=p} (-1)^\alpha C_{p+1}^\alpha \Delta^{k-p-1} a_{p+1+n-\alpha} - \sum_{\alpha=1}^{\alpha=p} (-1)^\alpha C_p^{\alpha-1} \Delta^{k-p-1} a_{p+1+n-\alpha} + \sum_{\alpha=1}^{\alpha=p+1} (-1)^\alpha C_p^{\alpha-1} \Delta^{k-p-1} a_{p+1+n-\alpha}.$$

Din (6) deducem imediat:

(7) $$\Delta^k a_n = \sum_{\alpha=0}^{\alpha=p} (-1)^\alpha C_{p+1}^\alpha \Delta^{k-p-1} a_{p+1+n-\alpha} + (-1)^{p+1} C_p^p \Delta^{k-p-1} a_n,$$

de unde, ţinând seamă că

$$C_p^p = C_{p+1}^{p+1},$$

în cele din urmă avem:

$$(8) \qquad \Delta^k a_n = \sum_{\alpha=0}^{\alpha=p+1} (-1)^\alpha C_{p+1}^\alpha \Delta^{k-p-1} a_{p+1+n-\alpha},$$

care este chiar relaţia (I) în care am înlocuit pe p prin $p+1$.

Deci (I) este generală.

Observaţii. Făcând în relaţia (I) $p=k$ obţinem formula:

$$(9) \qquad \Delta^k a_n = \sum_{\alpha=0}^{\alpha=k} (-1)^\alpha C_k^\alpha a_{k+n-\alpha}$$

foarte importantă pentru teoria diferenţelor şi care pentru $n=0$ se reduce la:

$$(10) \qquad \Delta^k a_0 = \sum_{\alpha=0}^{\alpha=k} (-1)^\alpha C_k^\alpha a_{k-\alpha}.$$

Formulele (9) şi (10) sunt formule clasice cunoscute şi ele se pot stabili şi direct, fără a face apel la relaţia (I).

Ce-i drept, după cum procedează *Comberousse* de exemplu[1]), pentru cazul acestor formule, se întrebuinţează tot metoda inducţiei complete, însă lucrul acesta este natural dacă ţinem seama că, în consideraţiile noastre relative la relaţia (I), am fi putut face să între dela început în locul lui p, variabila k.

Teorema II. *Termenul de rang n al şirului format cu diferenţele de ordinul k ale termenilor corespunzători din şirul* (1), *se exprimă prin relaţia:*

$$(II) \qquad \boxed{\Delta^k a_n = \sum_{\alpha=0}^{\alpha=p} C_p^\alpha \Delta^{k+\alpha} a_{n-p}}, \quad (p \leq n),$$

simbolul C_p^α *având aceeaşi semnificaţie ca şi în cazul relaţiei* (I).

Pentru stabilirea relaţiei (II) voiu proceda tot prin inducţie completă.

Astfel se observă în primul rând că şi această relaţie se verifică pentru $p=0$ şi $p=1$.

Intr'adevăr, pentru $p=0$, relaţia (II) se reduce, ca şi relaţia (I), la identitatea:

$$\Delta^k a_n = \Delta^k a_n,$$

iar pentru $p=1$, această relaţie se reduce la:

$$(11) \qquad \Delta^k a_n = \Delta^k a_{n-1} + \Delta^{k+1} a_{n-1},$$

care nu este decât relaţia (2) în care s'a înlocuit pur şi simplu k prin $k+1$, iar n prin $n-1$.

Să presupunem acum că relaţia (II) este adevărată pentru un p oarecare şi în această ipoteză să arătăm ca ea are loc şi pentru $p+1$.

Pentru aceasta înlocuim în relaţia (11) pe k prin $k+\alpha$, iar pe n prin $n-p$. Vom avea astfel:

$$(12) \qquad \Delta^{k+\alpha} a_{n-p} = \Delta^{k+\alpha} a_{n-p-1} + \Delta^{k+\alpha+1} a_{n-p-1},$$

relaţie, în virtutea căreia, relaţia (II) devine:

$$\Delta^k a_n = \sum_{\alpha=0}^{\alpha=p} C_p^\alpha \Delta^{k+\alpha} a_{n-p-1} + \sum_{\alpha=0}^{\alpha=p} C_p^\alpha \Delta^{k+\alpha+1} a_{n-p-1}$$

ceeace se mai poate scrie şi sub forma:

$$(13) \qquad \Delta^k a_n = \sum_{\alpha=0}^{\alpha=p} C_p^\alpha \Delta^{k+\alpha} a_{n-p-1} + \sum_{\alpha=1}^{\alpha=p+1} C_p^{\alpha-1} \Delta^{k+\alpha} a_{n-p-1}.$$

Ţinând şi de astă dată seamă de relaţia

$$C_p^\alpha = C_{p+1}^\alpha - C_p^{\alpha-1},$$

relaţia (13) la rândul său devine:

$$\Delta^k a_n = \sum_{\alpha=0}^{\alpha=p} C_{p+1}^\alpha \Delta^{k+\alpha} a_{n-p-1} - \sum_{\alpha=0}^{\alpha=p} C_p^{\alpha-1} \Delta^{k+\alpha} a_{n-p-1} + \sum_{\alpha=1}^{\alpha=p+1} C_p^{\alpha-1} \Delta^{k+\alpha} a_{n-p-1},$$

de unde deducem imediat:

$$\Delta^k a_n = \sum_{\alpha=0}^{\alpha=p} C_{p+1}^\alpha \Delta^{k+\alpha} a_{n-p-1} + C_p^p \Delta^{k+p+1} a_{n-p-1}$$

şi având iarăşi în vedere că:

$$C_p^p = C_{p+1}^{p+1},$$

în cele din urmă avem:

[1]) A se vedea *Charles De Comberousse*: Cours de Mathématiques, Tome Quatrième, Algèbre Supérieure, Seconde Partie, Cinquième Édition (Paris, Gauthier-Villars, 1923), pag. 825—828.

$$(14)\qquad \Delta^k a_n = \sum_{\alpha=0}^{\alpha=p+1} C_{p+1}^{\alpha} \Delta^{k+\alpha} a_{n-p-1},$$

care este chiar relaţia (II) în care s'a înlocuit p prin $p+1$.

Deci (II) este şi ea generală.

Observaţii. Făcând în relaţia (II) $p=n$, obţinem formula:

$$(15)\qquad \Delta^k a_n = \sum_{\alpha=0}^{\alpha=n} C_n^{\alpha} \Delta^{k+\alpha} a_0,$$

deasemenea foarte importantă şi care pentru $k=0$ se reduce la

$$(16)\qquad a_n = \sum_{\alpha=0}^{\alpha=n} C_n^{\alpha} \Delta^{\alpha} a_0.$$

Formulele (15) şi (16) sunt şi ele cunoscute şi se pot stabili întocmai ca şi formulele (9) şi (10) pe cale directă.[2]

Explicaţia faptului pentru acest caz este analoagă cu aceea pe care am dat-o pentru cazul formulelor (9) şi (10).

NOTE MATEMATICE

12. — *Asupra a „Două teoreme relative la teoria diferenţelor".*

Cele două teoreme stabilite pe cale directă de d-l prof. *E. Vişa* în articolul din prezentul număr, se pot deduce cu uşurinţă din două formule cunoscute în *„Teoria Diferenţelor"*, printr'o simplă deplasare de indici, ceeace voesc a arăta.

In adevăr, dacă $a_0, a_1, \ldots a_n$, sunt nişte numere oarecare şi dacă însemnăm cu $\Delta a_i, \Delta^2 a_i, \ldots, \Delta^k a_i, \ldots$, diferenţele lor de diferite ordine, definite cum se ştie prin relaţiile:

$$\Delta^k a_i = \Delta^{k-1} a_{i+1} - \Delta^{k-1} a_i, \quad (i,k=0,1,2,\ldots,n,\ldots)$$

atunci în *„Teoria Diferenţelor"* sunt stabilite următoarele două formule:

$$(1)\qquad \Delta^p a_0 = a_p - C_p^1 a_{p-1} + \cdots + (-1)^p a_0$$

$$(2)\qquad a_n = a_0 + C_n^1 \Delta a_0 + C_n^2 \Delta^2 a_0 + \cdots + \Delta^n a_0$$

(*Comberousse*, t. II, p. 651, 653).

[2]) A se vedea *Charles De Comberousse*, loc. cit.

1. Dacă acum considerăm şirul de numere,

$$(3)\qquad a_n, \quad a_{n+1}, \ldots, \quad a_{n+p}, \ldots$$

din care formăm şirul diferenţelor de ordinul $k-p$, $(p \leqq k)$:

$$(4)\qquad \Delta^{k-p} a_n, \quad \Delta^{k-p} a_{n+1}, \ldots, \quad \Delta^{k-p} a_{n+p}, \ldots,$$

atunci conform relaţiei (1), diferenţa de rangul p al primului termen din şirul (4) se poate exprima cu ajutorul primelor $p+1$ termeni, astfel că:

$$\Delta^{(k-p)+p} a_n = \Delta^k a_n = \Delta^{k-p} a_{n+p} - C_p^1 \Delta^{k-p} a_{n+p-1} + C_p^2 \Delta^{k-p} a_{n-p+2} - \cdots + (-1)^p \Delta^{k-p} a_n,$$

sau:

$$(5)\qquad \boxed{\Delta^k a_n = \sum_{\alpha=0}^{p} (-1)^{\alpha} C_p^{\alpha} \Delta^{k-p} a_{p+n-\alpha}}, \quad (p \leqq k).$$

Avem astfel stabilită formula cuprinsă în prima teoremă din articolul menţionat.

2. Trecem la a 2-a teoremă:

Pentru aceasta, fie şirul de numere oarecare:

$$a_{n-p}, \quad a_{n-p+1}, \ldots, \quad a_n \ldots, \qquad (p \leqq n),$$

din care formăm şirul diferenţelor de ordinul k:

$$\Delta^k a_{n-p}, \quad \Delta^k a_{n-p+1}, \ldots, \quad \Delta^k a_n, \ldots$$

Aplicând acestui şir relaţia (2), pentru al $(p+1)$, lea termen, putem scri:

$$\Delta^k a_n = \Delta^k a_{n-p} + C_p^1 \Delta^{k+1} a_{n-p} + C_p^2 \Delta^{k+2} a_{n-p} + \cdots + C_p^p \Delta^{k+p} a_{n-p},$$

sau:

$$(6)\qquad \boxed{\Delta^k a_n = \sum_{\alpha=0}^{p} C_p^{\alpha} \Delta^{k+\alpha} a_{n-p}}, \quad (p \leqq n).$$

Aceasta este tocmai formula din a 2-a teoremă a d-lui prof. *Vişa.*

Observare. Pe când d-l *Vişa*, deduce formulele (1) şi (2) din formule (5) şi (6) pe care d-sa le-a stabilit, eu am arătat invers cum se pot stabili formulele (5) şi (6) plecând de la formulele cunoscute (1) şi (2).

V ALACI

13. — *Sur l'équation diophantienne*

$$2x^3+2y^3=u^3+v^3+w^3+t^3$$

v et t, positif ou négatif).

On obtient une infinité de solutions en nombres entiers de cette équation en la mettant sous la forme:

$$2x^3+2y^3=(x+\alpha)^3+(x-\beta)^3+(y+\gamma)^3+(y-\delta)^3.$$

On obtient, après développement des cubes et réduction des termes, la condition:

$$3x^2(\alpha-\beta)+3x(\alpha^2+\beta^2)+\alpha^3-\beta^3+$$
$$3y^2(\gamma-\delta)+3y(\gamma^2+\delta^2)+\gamma^3-\delta^3=0$$

On peut y satisfaire en posant d'abord

$$x^2(\alpha-\beta)=y^2(\delta-\gamma)$$

ou

$$\frac{x^2}{y^2}=\frac{\delta-\gamma}{\alpha-\beta}.$$

Posons maintenant

$$\delta=\gamma+\mu^2,\quad \alpha=\beta+\nu^2,$$

il vient

$$\frac{x^2}{y^2}=\frac{\mu^2}{\nu^2}\quad\text{ou}\quad\frac{x}{y}=\pm\frac{\mu}{\nu}.$$

Nous allons prendre dans la suite $x=\frac{\mu y}{\nu}$.

La condition devient:

$$3x\left[2\alpha^2-2\alpha\nu^2+\nu^4+\frac{\nu}{\mu}(2\gamma^2+2\gamma\mu^2+\mu^4)\right]=$$
$$+3\gamma^2\mu^2+3\gamma\mu^4+\mu^6-3\alpha^2\nu^2+3\alpha\nu^4-\nu^6.$$

D'où

$$x=\frac{\mu(+3\gamma^2\mu^2+3\gamma\mu^4+\mu^6-3\alpha^2\nu^2+3\alpha\nu^4-\nu^6)}{3(2\alpha^2\mu-2\alpha\mu\nu^2+\mu\nu^4+2\gamma^2\nu+2\gamma\mu^2\nu+\mu^4\nu)}=$$
$$\frac{\mu(+3\gamma^2\mu^3+3\gamma\mu^4+\mu^6-3\alpha^2\nu^2+3\alpha\nu^4-\nu^6}{(6\alpha^2\mu-6\alpha\mu\nu^2+3\mu\nu^4+6\gamma^2\nu+6\gamma\mu^2\nu+3\mu^4\nu}=\frac{\mu A}{B},$$

les notations s'expliquant d'elles-mêmes.

On calcule les valeurs de y, $x+\alpha$, $x-\beta$, $y+\gamma$, $y-\delta$, à l'aide des 4 paramètres arbitraires α, γ, μ, ν et des fonctions A et B de ces paramètres, et on trouve finalement:

$$\boxed{2(\mu A)^3+2(\nu A)^3=(\mu A+\nu B)^3+[\mu A+(\nu^2-\alpha)B]^3+(\nu A+\gamma B)^3+[\nu A-(\mu^2+\gamma)B]^3.}$$

Si l'on remplace A et B par leur expression en fonction de α, γ, μ et ν on a une solution avec 4 paramètres arbitraires.

Exemples numériques.

1. $\alpha=2$, $\gamma=2$, $\mu=2$, $\nu=1$; A = +201, B = +150, ou peut prendre

$$A=67,\qquad B=50,$$

donc

$$2(2.67)^3+2(1.67)^3=(2.67+2.50)^3+(2.67+(-1)50)^3$$
$$+(1.67+2.50)^3+(1.67-6.50)^3,$$

ou

$$\boxed{2.134^3+2.67^3=234^3+84^3+167^3-233^3}$$
$$(=5.413.734).$$

2. $\alpha=4$, $\beta=3$, $\mu=2$, $\nu=1$; A=279, B=324, ou peut prendre

$$A=31,\qquad B=36;$$

il vient

$$2(2.31)^3+2(1.31)^3=(2.31+4\,36)^3+(2.31-3.36)^3$$
$$+(1.31+3.36)^3+(1.31-7.36)^3$$

ou

$$\boxed{2.62^3+2.31^3=206^3-46^3+139^3-221^3}$$
$$(=536.238).$$

A. GLODEN
(Luxenbourg)

14. — In nota No 10 din numărul trecut, pe care am cetit'o cu multă plăcere, se va suprima soluţia greşită:

$$17^2+46^2=48^2+1.$$

Se va adăoga însă soluţia:

$$12^2+71^2=72^2+1.$$

A. GLODEN

BIBLIOGRAFIE

1. *Gazeta Matematică*, anul XLII, No. 11, Iulie 1937. Determinarea transformărilor omografice care lasă neschimbată o ecuaţie de gradul al 2-lea, de *Th. Angheluţă*. Despre rădăcinele comune la mai multe ecuaţii multinome, de *Tiberiu Popoviciu*. In jurul problemelor 1386—2889, de Lt. *Mihail I. Focşăneanu*. Premiul Inginer *H. Capriel*

de G-l *Gh. Buicliu*, *Gh. Iliescu*, *D. Stoica*. Note matematice. Chestiuni de examen. Bibliografie. Cereri. Diverse. Probleme rezolvate. Exerciţii. Probleme propuse.

2. *Bulletin Stientifique de L'École Polytechnique de Timişoara*, tome 7, fasc. 1—2, 1937. Une classe nouvelle de fonctions discontinues à deux variables et les équations correspondantes, qui peuvent représenter différentes configurations géométriques, par *V. Alaci*. Sur les fonctions *n*-métaharmoniques, par *Michel Ghermanescu*. Sur deux classes de courbes, par *C. Ionescu-Bujor*. Etude d'un jet gazeux, par *Caius Jacob*. Considérations sur le problème des deux corps dans le cas de masses variables, par *Théophile Vescan*. Măsurarea debitelor mici prin strangularea secţiunii de scurgere, de Ing. *A. Bărglăzan*. Efectul giroscopic al elicelor aeriene, de Dr. Ing. *I. Vlădea*. L'influence de la résistance à la traction sur la striction, l'allongement de rupture et l'allongement uniforme pour l'acier au carbone forgé et recuit, par *Florin Oniţiu*. Spalten schwerer Mineralöle bei Athmosphärendruck, von Prof. Dr. Ing. *C. Cândea* und Dr. *L. I. Sauciuc*. Über den Einfluss verchiedener Stoffe auf das Verhalten von Motortreibmittel bei der Oxydation, von Prof. Dr. Ing. *C. Cândea* und *N. Cristodulo*. Valoarea nisipurilor petrolifere, de *Ion Cristescu*. Über die Lichtabsorption der wässerigen Kupferchloridlösung, von *J. G. Murgulescu*. Versuche mit einem Compoundierten rumänischen Öl zur Schmierung von Schiffsmaschinen, von Ing. *Sabin Săceanu*. Contribuţiuni la studiul şi construcţia maşinelor hidraulice în România, de Prof. Ing. *Pompiliu Nicolau*.

PROBLEME REZOLVATE

667. — *Să se găsiască numerele ale căror patrate perfecte se termină cu 444.441.*

GH. CONSTANTINESCU

Soluţia acestei probleme a fost dată 5 ani după propunerea ei în *Gazeta Matematică*, Vol. XXXVII, la pag. 366, ca aplicaţiune la articolul „*Asupra ultimului grup de p cifre ale patratelor perfecte*“ de d l *I. V. Mătieş*. S-au găsit acolo soluţiile

$$N_1 = 5 \times 10^5 n \pm 175.771\ ^{1)}$$

$$N_2 = 5 \times 10^5 n \pm 82.021,$$

n fiind un întreg oare care.

De oare ce nu toţi corespondenţii pot avea la îndemână volumele vechi ale *Gazetei Matematice* şi de oare ce D-l *I. V. Mătieş* a întrebuinţat în metoda d-sale 60 de ridicări la patrat, vom da în cele ce urmează o soluţie complectă problemei 667, pentru a indica o metoda de rezolvat astfel de probleme.

Să observăm *că patratele numerelor*

$$M = 10^p A \pm a_p$$

se termină cu aceleaşi p cifre, căci

$$M^2 = [A^2 10^p \pm 2 A a_p] \text{ Mult. } 10^p + a_p^2 .$$

Deci dacă am găsit un număr

$$M = 10^p A + a_p$$

al cărui patrat se termină cu N_p de p cifre, atunci şi patratul lui

$$M' = 10^p A - a_p$$

se termină cu N_p.

Apoi dacă

$$a_p + b_p = \text{Mult. } 10^p ,$$

atunci a_p^2 şi b_p^2 se termină cu aceleaşi p cifre, căci din egalitatea precedentă se deduce

$$a_p^2 = \text{Mult. } 10^p + b_p^2$$

$$a_p^2 - b_p^2 = \text{Mult. } 10^p .$$

***

Conform acestor observaţiuni, de oare ce 1^2 se termină cu 1 şi de oare ce

$$1 + 9 = 10,$$

rezultă că *numerele ale căror patrate se termină cu 1* sunt

$$N = 10 n \pm 1. \tag{1}$$

Consider numai semnul + şi ridic pe (1) la patrat:

$$N^2 = 100 n^2 + 20 n + 1.$$

Pentru ca N^2 să se termine cu 41, trebuie ca $20 n + 1$ să se termine cu 41, sau $2 n$ să se termine cu 4, sau n să se termine cu 2 sau 7, adică n să fie de forma $5 m + 2$. Ducând această valoare în (1) se găseşte că numerele ale căror pătrate se termină în 41, sunt de forma

$$N = 50 n \pm 21. \tag{2}$$

Terminaţia 441. Din (2) se deduce

---

[1]) Această soluţia a fost împrimată eronat

$$5 \times 10^5 n \pm 17571$$

în *Gazeta Matematică*. G-l Gh. B.

$$N^2 = 2500\,n^2 + 2100\,n + 441.$$

Scriem numerele de adunat unele sub altele

$$\begin{matrix} n^2 \times 2.500 \\ n \times 2.100 \\ 441. \end{matrix}$$

Dând lui n valorile $0, 1, \ldots 9$ se vede că numai pentru n terminat în 0 sau 5, sau

$$n = 5\,m$$

suma precedentă se termină în 441. Ducând această valoare în (2) se găseşte că *patratele de forma*

(3) $$N = 250\,n \pm 21$$

se termină în 441.

Terminaţia 4.441. Din (3) se scoate

$$N^2 = 62.500\,n^2 + 10500\,n + 441$$

$$\left\{\begin{matrix} n^2 \times 62.500 \\ n \times 10.500 \\ 441. \end{matrix}\right.$$

Făcând $n = 2\,p$ se găseşte pentru adunare

$$\begin{matrix} p^2 \times 250.000 \\ p \times 21.000 \\ 441, \end{matrix}$$

de unde se vede că convin numai numerele p terminate cu 4, deci

$$p = 10\,m + 4 \qquad \overset{*}{*}\overset{*}{*} \qquad n = 20\,m + 8$$

şi din (3):

$$N_1 = 5.000\,n \pm 2.021.$$

Făcând $n = 2\,p + 1$ şi procedând la fel se găseşte

$$N_2 = 5.000\,n \pm 771.$$

Concluzia este că patratele numerelor

(4) $$N_1 = 5.000\,n \pm 2.021$$

(5) $$N_2 = 5.000\,n \pm 771,$$

se termină cu 4.441 şi că (4) şi (5) sunt *toate* numerele care se termină la patrat cu 4.441.

Terminaţia 44.441. Plecând de la (4) şi (5) găsesc pe aceiaşi cale că toate numerele ale căror patrate se termină în 44.441, sunt

(6) $$N_1 = 50.000\,n \pm 32.021$$

(7) $$N_2 = 50.000\,n \pm 25.771.$$

Terminaţia 444.441. Din (6) şi (7) găsim soluţiile

$$\left.\begin{matrix} N_1 = 500\,000\,n \pm 175.771 \\ N_2 = 500.000\,n \pm 82.021 \end{matrix}\right\},$$

care sunt soluţiile generale cerute de problema 667.

Dând lui n valorile 0 şi 1 găsim următoarele 6 soluţii particulare

175.771;	324.229;	675.771
82.021;	417.979;	582.021

G-l Gh. B.

Singura soluţie bună din 3 primite, este a d-lui *I. V. Mătieş*, care s-a servit de rezultatele obţinute în articolul său din *Gazeta Matematică*, Vol. XXXVII.

1509. — *Să se stabilească identitatea:*

$$u^2 + v^2 + w^2 = u_1^2 + v_1^2 + w_1^2,$$

ştiind că:

$$u = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + 2\,\delta\,(\beta + 2\,\gamma)$$
$$v = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + 2\,\delta\,(\alpha + \gamma)$$
$$w = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + 2\,\delta\,(2\,\alpha - \beta)$$
$$u_1 = -\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + 2\,\delta\,(\beta + 2\,\gamma) + 2\,\alpha\,(\beta + \gamma)$$
$$v_1 = \alpha^2 - \beta^2 + \gamma^2 + 2\,\delta\,(\alpha + \gamma) + 2\,\beta\,(\alpha - \gamma)$$
$$w_1 = \alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2 + 2\,\delta\,(2\,\alpha - \beta) + 2\,\gamma\,(\alpha - \beta)$$

A. GLODEN

Putem urmări cu uşurinţă următoarele dezvoltări:

(1) $$u^2 + v^2 + w^2 = 3\,(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)^2 + 4\,\delta^2\,[(\beta + 2\,\gamma)^2 + (\alpha + \gamma)^2 + (2\,\alpha - \beta)^2] + 12\,\delta\,(\alpha + \gamma)\,(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2).$$

Apoi:

$$u_1^2 + v_1^2 + w_1^2 = (-\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)^2 + 4\,\delta^2\,(\beta + 2\,\gamma)^2 + 4\,\alpha^2\,(\beta + \gamma)^2 + 4\,(-\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)\,[\delta\,(\beta + 2\,\gamma) + \alpha\,(\beta + \gamma)] + 8\,\alpha\,\delta\,(\beta + \gamma)\,(\beta + 2\,\gamma) +$$
$$(\alpha^2 - \beta^2 + \gamma^2)^2 + 4\,\delta^2\,(\alpha + \gamma)^2 + 4\,\beta^2\,(\alpha - \gamma)^2 + 4\,(\alpha^2 - \beta^2 + \gamma^2)\,[\delta\,(\alpha + \gamma) + \beta\,(\alpha - \gamma)] + 8\,\beta\,\delta\,(\alpha^2 - \gamma^2) +$$
$$(\alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2)^2 + 4\,\delta^2\,(2\,\alpha - \beta)^2 + 4\,\gamma^2\,(\alpha - \beta)^2 + 4\,(\alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2)\,[\delta\,(2\,\alpha - \beta) + \gamma\,(\alpha - \beta)] + 8\,\gamma\,\delta\,(2\,\alpha - \beta)\,(\alpha - \beta) =$$
$$3\,(\alpha^4 + \beta^4 + \gamma^4) - 2\,(\alpha^2\,\beta^2 + \beta^2\,\gamma^2 + \gamma^2\,\alpha^2) +$$

$$4\delta^2[(\beta+2\gamma)^2+(\alpha+\gamma)^2+(2\alpha-\beta)^2]+$$
$$4[\alpha^2(\beta+\gamma)^2+\beta^2(\alpha-\gamma)^2+\gamma^2(\alpha-\beta)^2]+$$
$$8[\alpha\delta(\beta+\gamma)(\beta+2\gamma)+\beta\delta(\alpha^2-\gamma^2)+$$
$$\gamma\delta(2\alpha-\beta)(\alpha-\beta)]+$$
$$4\{(-\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)(\beta\delta+2\delta\gamma+\alpha\beta+\alpha\gamma)+$$
$$(\alpha^2-\beta^2+\gamma^2)(\alpha\delta+\gamma\delta+\alpha\beta-\beta\delta)+$$
$$(\alpha^2+\beta^2-\gamma^2)(2\alpha\delta-\beta\delta+\alpha\gamma-\beta\gamma)\}=$$
$$3(\alpha^4+\beta^4+\gamma^4)-2(\alpha^2\beta^2+\beta^2\gamma^2+\gamma^2\alpha^2)+$$
$$4\delta^2[(\beta+2\gamma)^2+(\alpha+\gamma)^2+(2\alpha-\beta)^2+$$
$$[4\alpha^2\beta^2+8\alpha^2\beta\gamma+4\alpha^2\gamma^2+4\alpha^2\beta^2+$$
$$4\beta^2\gamma^2-8\alpha\beta^2\gamma+4\alpha^2\gamma^2+4\beta^2\gamma^2-8\alpha\beta\gamma^2]+$$
$$8[\alpha\beta^2\delta+3\alpha\beta\gamma\delta+2\alpha\gamma^2\delta+\alpha^2\beta\delta-\beta\gamma^2\delta+$$
$$2\alpha^2\gamma\delta-3\alpha\beta\gamma\delta+\beta^2\gamma\delta]+$$
$$4(3\alpha^3\delta-2\alpha^2\beta\delta-2\alpha^2\beta\gamma+2\alpha\beta^2\gamma+$$
$$2\alpha\beta\gamma^2-\alpha\gamma^2\delta-\alpha^2\gamma\delta+$$
$$\alpha\beta^2\delta+\beta^2\gamma\delta+2\beta\gamma^2\delta+3\gamma^3\delta)=$$
$$3(\alpha^4+\beta^4+\gamma^4)+6(\alpha^2\beta^2+\beta^2\gamma^2+\gamma^2\alpha^2)+$$
$$4\delta^2[(\beta+2\gamma)^2+(\alpha+\gamma)^2+(2\alpha-\beta)^2]+$$
$$12\delta[\alpha^3+\alpha\gamma^2+\alpha^2\gamma+\alpha\beta^2+\gamma\beta^2+\gamma^3]=$$
$$3(\alpha^4+\beta^4+\gamma^4+2\alpha^2\beta^2+2\beta^2\gamma^2+2\gamma^2\alpha^2)+$$
$$4\delta^2[(\beta+2\gamma)^2+(\alpha+\beta)^2+(2\alpha-\beta)^2]+$$
$$12\delta[\alpha(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)+\gamma(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)],$$

sau:

$$u_1^2+v_1^2+w_1^2=3(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)^2+4\delta^2[(\beta+2\gamma)^2+$$
$$(\alpha+\gamma)^2+(2\alpha-\beta)^2]+12\delta(\alpha+\gamma)(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2).$$

Comparând ambii membrii a-i relațiilor (1) și (2) deducem:

$$u^2+v^2+w^2=u_1^2+v_1^2+w_1^2.$$

Astfel identitatea dată este stabilită.

Soluții date de d-nii: *Amărăşteanu F. Marcel* (Craiova), *Florescu Victor* (lic. Milit., N. Filipescu), *Lăzărescu Stelian* (lic. Milit., N. Filipescu), *Lupescu Gh. Corneliu* (Şc. Of. de Artilerie), *Negrea A. Leonte-Mircea* (Brăila), *Negulescu D. Ştefan* (lic. Milit, N. Filipescu), *Popescu-Zorica N. Alexandru* (lic. Iosif, București) și *Stamate I. Ionel* (lic. Lugoj).

Soluția autorului. **Soluția în numere întregi a ecuației:**

$$(1)\qquad (x-\delta)^2+x^2+(x+\delta)^2=$$
$$(x-\delta-\alpha)^2+(x+\beta)^2+(x+\delta+\gamma)^2,$$

este:

$$x=\frac{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+2\delta(\alpha+\beta)}{2(\alpha-\beta-\gamma)}.$$

Se calculează în urmă expresiele:

$$x-\delta,\quad x+\delta,\quad x-\delta-\alpha,\quad x+\beta,\quad x+\delta+\gamma,$$

se înlocuește în ecuația (1) și se obține identitatea cerută.

1518. — *Să se rezolve sistemul:*

$$\begin{cases} y^2z+yz^2=30\\ z^2x+zx^2=12\\ x^2y+xy^2=6 \end{cases}$$

ADRIAN POPESCU

Sistemul dat se mai poate scri:

$$(1)\qquad \begin{cases} yz(y+z)=30\\ zx(z+x)=12\\ xy(x+y)=6 \end{cases}$$

Prin adunare obținem:

$$yz(y+z)+zx(z+x)+xy(x+y)=48,$$

care se mai poate scri:

$$(2)\quad (xy+yz+zx)(x+y+z)-3xyz=48.$$

Dacă înmulțim ecuațiile sistemului (1), obținem:

$$x^2y^2z^2(x+y)(y+z)(z+x)=2160,$$

sau:

$$(3)\quad x^2y^2z^2[(xy+yz+zx)(x+y+z)-xyz]=2160.$$

Notând:

$$\begin{cases} x+y+z=u\\ xy+yz+zx=v\\ xyz=w, \end{cases}$$

ecuațiile (2) și (3) devin:

$$(4)\qquad \begin{cases} uv-3w=48\\ w^2(uv-w)=2160. \end{cases}$$

Scoțând valoarea lui uv din prima ecuație din (4) și înlocuind'o în a 2-a, avem:

$$w^2(48+2w)=2160,$$

sau:

$$w^3+24w^2-1080=0,$$

care ecuație se mai poate scri:

$$(w-6)(w^2+30w+180)=0.$$

Rădăcinele acestei ecuații sunt:

$$w_1=6, \qquad w_{2,3}=-15\pm 3\sqrt{5}.$$

Urmează dar din cele expuse că:

(5) $xyz=6$ și (6) $xyz=-15\pm 3\sqrt{5}$.

1°. *Cazul* $xyz=6$.

Impărțim acum ecuațiile sistemului (1) pe rând cu ecuația (5) și obținem:

$$\begin{cases} \dfrac{y+z}{x}=5 \\ \dfrac{z+x}{y}=2 \\ \dfrac{x+y}{z}=1 \end{cases}$$

Acest sistem se mai poate scri, aplicând o proprietate cunoscută a proporțiilor:

$$(7)\qquad \begin{cases} \dfrac{x+y+z}{x}=6 \\ \dfrac{x+y+z}{y}=3 \\ \dfrac{x+y+z}{z}=2 \end{cases}$$

Prin înmulțire obținem:

$$(8)\qquad \frac{(x+y+z)^3}{xyz}=36$$

și cum $xyz=6$, ecuația (8) devine

$$(x+y+z)^3=216.$$

Rezolvind această ecuație avem:

(9) $x+y+z=6$, $x+y+y=6\alpha$, $x+y+z=6\alpha^2$,

unde 1, α, α^2 sunt rădăcinele ecuației

$$t^3-1=0, \qquad \left(t_1=1,\ t_2=\alpha=\frac{1+i\sqrt{3}}{2},\right.$$

$$\left. t_3=\alpha^2=\frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right).$$

Folosind în (7) valorile găsite în (9) pentru x, y, z, găsim ușor următoarele sisteme de soluții:

$$\begin{cases} x=1 \\ y=2 \\ z=3 \end{cases} \qquad \begin{cases} x=\alpha \\ y=2\alpha \\ z=3\alpha \end{cases} \qquad \begin{cases} x=\alpha^2 \\ y=2\alpha^2 \\ z=3\alpha^2 \end{cases}$$

2°. *Cazul* $xyz=-15\pm 3\sqrt{5}=A_k$, $(k=1,2)$.

Impărțim ecuațiile sistemului (1) respectiv prin ecuația

$$xyz=A_k, \qquad (k=1,2),$$

și avem:

$$\begin{cases} \dfrac{y+z}{x}=\dfrac{30}{A_k} \\ \dfrac{z+x}{y}=\dfrac{12}{A_k} \\ \dfrac{x+y}{z}=\dfrac{6}{A_k}. \end{cases}$$

Acest sistem se mai poate scri:

$$(10)\qquad \begin{cases} \dfrac{x+y+z}{x}=\dfrac{30+A_k}{A_k} \\ \dfrac{x+y+z}{y}=\dfrac{12+A_k}{A_k} \\ \dfrac{x+y+z}{z}=\dfrac{6+A_k}{A_k} \end{cases}$$

Multiplicând aceste relații între ele și ținând seamă că $xyz=A_k$, avem:

$$x+y+z)^3=\frac{(30+A_k)(12+A_k)(6+A_k)}{A_k^3}=B_k^3.$$

Rezolvind această ecuație, obținem:

$x+y+z=B_k$, $x+y+z=B_k\alpha$, $x+y+z=B_k\alpha^2$,

unde 1, α, α^2 sunt rădăcinele ecuației $t^3-1=0$.

Inlocuind aceste valori a lui $x+y+z$ în sistemul (10), găsim cu ușurință următoarele sisteme de soluții:

$$\begin{cases} x=\dfrac{A_kB_k}{30+A_k} \\ y=\dfrac{A_kB_k}{12+A_k}, \\ z=\dfrac{A_kB_k}{6+A_k} \end{cases} \qquad \begin{cases} x=\dfrac{A_kB_k\alpha}{30+A_k} \\ y=\dfrac{A_kB_k\alpha}{12+A_k}, \\ z=\dfrac{A_kB_k\alpha}{6+A_k} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \dfrac{A_k B_k \alpha^2}{30 + A_k} \\ y = \dfrac{A_k B_k \alpha^2}{12 + A_k}, \quad (k = 1, 2). \\ z = \dfrac{A_k B_k \alpha^2}{6 + A_k} \end{cases}$$

Soluţii parţiale date de d nii: *Andrunachievici Vladimir* (student, Iaşi), *Kornis Ernest* (lic. Loga, Timişoara), *Lupescu Gh. Corneliu* (Şc Of de Artilerie), *Tilică C. Ştefan* (lic. T-Severin) şi *Sava J. Victor* (lic. Internat, Iaşi).

1522. — *Se cer patratele perfecte de forma $a\,b\,c\,d\,e\,f$, în care a, b, f sunt în progresie geometrică crescătoare, iar c, d, e sunt în progresie aritmetică crescătoare.*

GH. CORNELIU LUPESCU

Cifrele a, b, f fiind în progresie geometrică crescătoare nu pot fi de cât:

1, 2, 4; 1, 3, 9; 2, 4, 8.

f fiind terminaţie de patrat perfect nu poate fi 8, astfel că grupa 2, 4, 8 nu poate fi luată în consideraţie.

Patratul cerut este astfel de forma:

$12\,c\,d\,e\,4$ sau, $13\,c\,d\,e\,9$.

1°. *Cazul $12\,c\,d\,e\,4$.*

De oarece:

$$346^2 = 119716 < 120000,$$

iar:

$$361^2 = 130321 > 129999,$$

rădăcina patrată a numerelor de forma $12\,c\,d\,e\,4$ este cuprinsă dar, între 346 şi 361.

Dar singurile numere cuprinse între 346 şi 361 ale căror patrate s'ar putea termina cu 4, sunt:

348, 352, 358,

fiindcă:

$$348^2 = 121104$$
$$352^2 = 123904$$
$$358^2 = 128264.$$

Nici unul din aceste patrate nu este soluţie a problemei, căci se observă că cifrele c, d, e nu formează o progresie aritmetică crescătoare.

2°. *Cazul $13\,c\,d\,e\,9$.*

De oarece:

$$360^2 = 129600 < 130000,$$

iar:

$$375^2 = 140625 > 139999,$$

rădăcina patrată a numerelor de forma $13\,c\,d\,e\,9$ este astfel cuprinsă între 360 şi 375.

Dar singurile numere cuprinse între 360 şi 375, ale căror patrate s'ar putea termina cu 9, sunt:

363, 367, 373,

fiindcă:

$$363^2 = 131769$$
$$367^2 = 134689$$
$$373^2 = 139129.$$

Dintre aceste patrate, observăm că numai 134689 are cifrele c, d, e în progresie aritmetică crescătoare.

Singura soluţie a problemei este

$$134689 = 367^2.$$

Soluţii date de d-nii: *Anton C. George* (lic. Bistriţa), *Cazanacli V. Petre* (Chişinău), *Cristocea Gh. Nicolae* (lic. Milit., N. Filipescu), *Jidanu I. C-tin* (lic. Beiuş), *Kornis Ernest* (lic. Loga, Timişoara), *Milu I. Nicolae* (Şc. Preg. de Ofiţeri), *Moisovici Ştefan* (bacalaureat), *Trebici Carl* (lic. Cernăuţi) şi *Zagaican Ilie* (Conductor de L. P.)

1529. — *Să se afle un cub perfect de patru cifre, ştiind că numărul format de prima şi ultima cifră e cub perfect şi că dacă mărim cifra sutelor cu 3, obţinem un număr divizibil cu 11.*

C-TIN JIDANU

Fie $a\,b\,c\,d$ cubul de patru cifre cerut. Conform enunţului $a\,d$ este cub perfect, deci $a\,d$ este 27 sau 64 singurile cuburi de două cifre.

Cubul cerut $a\,b\,c\,d$ este de forma:

$2\,b\,c\,7$ sau $6\,b\,c\,4$.

Rădăcina cubică a acestor numere n'ar putea fi de cât 13 sau 14.

Dar,

$$13^3 = 2197$$
$$14^3 = 2744.$$

Cubul 2197 fiind de forma $2\,b\,c\,7$ şi pe de altă parte satisficând şi condiţia că mărindu-i cifra sutelor cu 3 devine divizibil prin 11, căci

$$2197 = \text{mult. } 11,$$

urmează că el este soluție a problemei.

Cubul 2744, nefiind de forma $6bc4$, nu este soluție.

Singura soluție a problemei este, $2197 = 13^3$.

Soluții date de d-ra: *Comloșan Cornelia* (Cluj) și de d-nii: *Amărăşteanu F. Marcel* (Şc. Polit, București), *Berinde L. Titus* (lic. Lugoj), *Cazanacli V. Petre* (Chișinău), *Cristocea Gh. Nicolae* (lic. Milit, N. Filipescu), *Florescu Victor* (lic. Milit, N. Filipescu), *Medeleanu Ion*, *Milu I. Nicolae* (Şc Preg. de Ofițeri), *Rădulescu Gh. Octavian* (lic. Milit., N. Filipescu), *Ripianu Andrei*, *Rosemberg I.* (lic. Roman), *Stamate I. Ionel* (lic. Lugoj), *Stefănescu Costin* (lic. Milit., N. Filipescu), *Sternberg H.* (lic. A. Pumnul, Cernăuți), *Tilică C. Ştefan* (lic. T-Severin) și *Vlad I. C. M.* (Sub-Lt).

1535. — *Să se rezolve următorul sistem:*

$$\begin{cases} x - y = a \\ \dfrac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} y} = \dfrac{b}{c} \end{cases}$$

și să se stabilească condiția de posibilitate.

MIHAIL BOTEZ

Ecuația 2-a se mai poate scri, aplicând o proprietate cunoscută a proporțiilor:

$$\frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y}{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y} = \frac{b+c}{b-c}$$

sau:

$$\frac{\dfrac{\sin x}{\cos x} + \dfrac{\sin y}{\cos y}}{\dfrac{\sin x}{\cos x} - \dfrac{\sin y}{\cos y}} = \frac{b+c}{b-c}.$$

De aci deducem:

$$\frac{\sin(x+y)}{\sin(x-y)} = \frac{b+c}{b-c}.$$

Această ecuație se mai poate scri, ținând seamă de prima ecuație a sistemului:

$$\sin(x+y) = \frac{b+c}{b-c}\sin a.$$

Sistemul dat este astfel echivalent cu următorul:

$$(1) \qquad \begin{cases} x - y = a \\ \sin(x+y) = \dfrac{b+c}{b-c}\sin a. \end{cases}$$

Pentru ca acest sistem să fie compatibil trebuie să avem:

$$-1 < \frac{b+c}{b-c}\sin a < 1.$$

Dacă aceste condiții sunt implinite, atunci putem determina un arc α astfel ca să avem:

$$(2) \qquad \frac{b+c}{b-c}\sin a = \sin\alpha,$$

și atunci sistemul (1) devine:

$$\begin{cases} x - y = a \\ \sin(x+y) = \sin\alpha, \end{cases}$$

sau:

$$\begin{cases} x - y = a \\ x + y = \alpha + 2k\pi, \end{cases} \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots)$$

De aci deducem:

$$\begin{cases} x = k\pi + \dfrac{\alpha + a}{2} \\ y = k\pi + \dfrac{\alpha - a}{2}, \end{cases} \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots)$$

unde α este determinat de relația (2).

Soluții date de d-nii: *Amărăşteanu F. Marcel* (Şc. Polit., București), *Cazanacli V. Petre* (Chișinău), *Cioc I. D-tru* (lic. Milit, Craiova), *Jidanu I. C-tin*, *Milu I. Nicolae* (Şc. Preg. de Ofițeri), *Negrea A. Mircea* (Brăila), *Rădulescu Gh. Octavian* (lic. Milit, N. Filipescu), *Ripianu Andrei*, *Tilică C. Ştefan* (lic. T-Severin) și *Vlad I. C. M.* (Sub-Lt).

1537. — *O persoană observă că anul ei de naştere este produsul între numerile care reprezintă vârsta sa acum și anul trecut. Care este anul de naştere?*

C-TIN TEODORESCU

Fie x vârsta persoanei. Problema fiind propusă în „R. M. T." în anul 1936, ecuația problemei este:

$$1936 - x = x(x-1),$$

de unde:

$$x^2 = 1936$$

și deci:

$$x = \sqrt{1936} = 44.$$

Persoana avea 44 de ani și anul ei de naştere a fost

$$1936 - 44 = 1892.$$

In adevăr, relația:

$$1892 = 44 \times 43$$

verifică enunțul.

Soluții date de d-ra: *Comloșan Cornelia* (Cluj) și de d-nii: *Amărăștеanu F. Marcel* (Șc. Polit, București), *Anastasiu Mihail* (lic. Milit, N. Filipescu), *Andrievici N.* (lic. Milit, N. Filipescu), *Anton George* (lic. Bistrița), *Babețiu Corneliu* (lic. Loga, Timișoara), *Belloiu B. D-tru* (lic. Milit., N. Filipescu), *Berinde L. Titus* (lic. Lugoj), *Buznea D. Dinu* (lic. Milit., N. Filipescu), *Cazanacli V. Petre* (Chișinău), *Deciulescu D. Gheorghe* (lic. Milit., N. Filipescu), *Diaconescu Marcel* (lic. Milit., N. Filipescu), *Florescu L. Victor* (lic. Milit, N. Filipescu), *Guțulescu N. Aurelian* (lic. Milit, N. Filipescu), *Kornis Ernest* (lic. Loga, Timișoara), *Medeleanu Ion*, *Negrea A. Mircea* (Brăila), *Rădulescu Gh. Octavian* (lic. Milit., N. Filipescu), *Ripianu Andrei*, *Rohr I. Alexandru* (lic. Milit., Cernăuți), *Staicu I. Nicolae* (lic. Milit, N. Filipescu), *Șeibulescu A C* (lic. Sp. Haret, București), *Stoenescu D. Mirel* (lic Milit. N. Filipescu), *Theodorescu Dorin* (lic. Milit., N. Filipescu), *Tica P. Marin-Gall*, *Tilica C. Ștefan* (lic. T-Severin), *Vlad I. C. M.* (Sub-Lt) și *Zagaican Ilie* (Conductor de L. P.)

Observarea autorului. Fenomenul din problemă se poate observa foarte rar. El nu se va mai întâmpla de cât în anul $2025 = 45^2$, când persoanele născute în 1980, în vârsta de 45 ani, vor avea ocazie să poată repeta această problemă.

1538. — In ce sistem de numerație, un număr de patru cifre de forma a b b a poate fi patratul unui număr de două cifre c c, fiind dat că a, b, c trebuesc să fie numere impare consecutive.

V. THÉBAULT

Fie x baza sistemului de numerație cerut, conform enunțului avem:

$$(a\,b\,b\,a)_x = (c\,c)_x^2.$$

Trecând în sistemul zecimal obținem:

$$a \times x^3 + b \times x^2 + b \times x + a = (c \times x + c)^2,$$

sau:

$$a(x^3 + 1) + b\,x(x + 1) = c^2(x + 1)^2.$$

Simplificând cu $x + 1$, dat fiind că $x \neq -1$, avem:

$$a(x^2 - x + 1) + b\,x = c^2(x + 1),$$

sau:

$$(1) \qquad a\,x^2 - (a - b + c^2)x + a - c^2 = 0.$$

Cum prin enunț:

$$b = a + 2, \qquad c = a + 4,$$

relația (1) devine:

$$a\,x^2 - [a - (a + 2) + (a + 4)^2] + a - (a + 4)^2 = 0,$$

sau:

$$(2) \quad a\,x^2 - (a^2 + 8\,a + 14)\,x - (a^2 + 7\,a + 16) = 0.$$

Acum trebuie să rezolvăm în numere întregi această ecuație cu două necunoscute a și x, ținând seamă că a este impar și $a \leqq x$.

1°. Pentru $a = 1$, ecuația (2) devine:

$$x^2 - 23\,x - 24 = 0,$$

care are rădăcinele $x = -1$ și $x = 24$.

Se vede că $x = 24$ este o soluție a problemei, adică este baza sistemului de numerație cerut. In adevăr în acest caz, $b = 3$, $c = 5$ și avem:

$$(1331)_{24} = (55)_{24}^2.$$

2°. Pentru $a = 3$, ecuația (2) devine:

$$3\,x^2 - 47\,x - 46 = 0.$$

Realizantul, $47^2 + 12 \times 46 = 2761$, nu este patrat perfect, deci nu putem avea soluție în acest caz.

2°. Pentru $a = 5$, ecuația (2) devine:

$$5\,x^2 - 79\,x - 76 = 0.$$

Realizantul, $79^2 + 20 \times 76 = 7761$, nu este patrat perfect, deci nu putem avea soluție.

4°. Pentru $a = 7$, ecuația (2) devine:

$$7\,x^2 - 119\,x - 114 = 0.$$

Realizantul, $119^2 + 28 \times 114 = 17353$, nu este patrat perfect, deci n'avem soluție.

5°. Pentru $a = 9$, ecuația (2) devine:

$$9\,x^2 - 167\,x - 160 = 0.$$

Realizantul, $167^2 + 36 \times 160 = 33649$, nu este patrat perfect, deci n'avem soluție în acest caz.

6°. Pentru $a = 11$, ecuația (2) devine:

$$11\,x^2 - 223\,x - 214 = 0.$$

Realizantul $223^2 + 44 \times 214 = 59045$, nu este patrat perfect, deci n'avem soluție în acest caz.

7°. Pentru $a = 13$, ecuația (2) devine:

$$(3) \qquad 13\,x^2 - 287\,x - 276 = 0,$$

Realizantul, $287^2 + 52 \times 276 = 96721 = 311^2$, este patrat perfect.

Rezolvind ecuaţia (3) avem:

$$x = \frac{287 \pm 311}{26}.$$

Singura soluţie întreagă şi pozitivă este $x = 23$.

Deci $x = 23$ este baza sistemului cerut, în care caz corespunde

$$a = 13, \quad b = 15, \quad c = 17.$$

In adevăr avem soluţia:

$$(\overline{13}\ \overline{15}\ \overline{15}\ \overline{13})_{23} = (\overline{17}\ \overline{17})^2_{24}.$$

Se poate proceda analog luând $a = 15, 17, 19, \ldots$ spre a se vedea ce soluţie mai putem găsi.

Au găsit numai soluţia, $(1331)_{24} = (55)^2_{24}$, d-nii: *Berinde L. Titus* (lic. Lugoj), *Jidanu I. C-tin* (lic. Beiuş), *Kornis Ernest* (lic. Loga, Timişoara), *Medeleanu Ion* şi *Tilică C. Ştefan* (lic. T-Severin).

Observare. Corespondenţii menţionaţi au găsit numai soluţia $(1331)_{24} = (55)^2_{24}$, căci au crezut că a nu poate fi de cât 1, 3, 5, 7, 9 şi n'au ţinut seamă că o cifră într'un sistem de numeraţie este în general orice număr mai mic ca baza, cum se observă de exemplu şi în soluţia:

$$(\overline{13}\ \overline{15}\ \overline{15}\ \overline{13})_{24} = (\overline{17}\ \overline{17})^2_{24},$$

dată de autor.

PROBLEME PROPUSE

1602. — Să se găsească numărul de patru cifre $a\,b\,c\,d$ egal cu produsul dintre 3^n şi numărul de două cifre $a\,d$.

G-L GH. BUICLIU

1603. — Să se afle un număr de cinci cifre divizibil cu 1111, ştiind că numărul format de prima şi ultima cifră a lui este cub perfect.

C-TIN I. JIDANU

1604. — Prin vârfurile A, B, C a unui triunghiu, se duc paralele de direcţie arbitrară, care întâlnesc o dreaptă dată Δ în α, β, γ. Să se demonstreze că paralelele la BC, CA, AB duse prin simetricele A', B', C' ale lui A, B, C în raport cu α, β, γ, sunt concurente.

V. THÉBAULT

1605. — Tangenta la o iperbolă într'un punct M al ei, întâlneşte asimptotele în punctele A şi B, iar normala în M întâlneşte axele în C şi D. Să se arate că punctele A, B, C, D sunt pe un cerc, care are ca diametru pe CD. Să se arate că raportul dintre AB şi CD este constant, când M descrie iperbola.

Dacă iperbola este echilateră, atunci figura ABCD este un patrat.

D. V. IONESCU

1606. — Să se arate că se pot elimina x şi y din relaţiile

$$\begin{cases} (x^3 - 3xy^2 - 2x^2 + 2y^2 + 3x + 1) + \\ \quad i\,y\,(3x^2 - y^2 - 4x + 3) = a \\ x^2 - y^2 + 2ixy = b, \end{cases}$$

şi în urmă să se efectueze eliminarea. $(i = \sqrt{-1})$

V. ALACI

1607. — Să se rezolve în numere întregi sistemul:

$$x^2 = y^2 + u^2 = y^2 + z^2 + t^2$$

A. GLODEN

1608. — Să se verifice identitatea:

$$\sqrt{2 + 2\cos\theta} \cdot \sqrt{2 + \sqrt{2 + 2\cos\theta}} \times \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + 2\cos\theta}}} = \frac{\sin\theta}{\sin\frac{\theta}{8}}$$

MIHAIL BOTEZ

1609. — Să se rezolve ecuaţia:

$$16^{\cos^2 x} + 5\,(4^{\sin^2 x} - 2^{\cos 2x}) - 16^{\sin^2 x} = 2.$$

D-TRU MATEI

Manuscrise primite de la corespondenţii noştrii până la 10 a lunei curente şi anume: Articole (A), Note (N), probleme propuse (P) şi probleme rezolvate indicate prin numărul lor de ordine.

Călugăreanu G. (P.); *Dascălescu Şt. Hristache* (1578, 1579, 1580, 1583, 1585); *Deciulescu D. Gh.* (1547, 1569, 1572, 1580, 1598, 1599 1601); *Jidanu I. C-tin* (P., 1429); *Medeleanu Ion* (1546, 1549, 1550, 1556, 1567, 1570, 1579, 1580, 1591, 1598); *Milu I. N.* (1490, 1506); *Petrescu C. Alin* (1574, 1579, 1597, 1599, 1601); *Ripianu Andrei* (P., 1533, 1535, 1599); *Rosemblatt S. Millu* (1562, 1567, 1569, 1573, 1574, 1580, 1587, 1591, 1592, 1598, 1599); *Saegiu V. C-tin* (1569, 1574, 1592, 1599); *Seibulescu A. C.* (1522, 1524, 1540) *Theodorescu N. Dorin* (1274, 1562).

INFORMAŢIUNI

La Redacţiunea „Revistei Matematice din Timişoara" se primesc abonamente pentru:

BOLETIN MATEMATICO

ANUL AL X-LEA

care a început în Martie 1937.

Costul *special* a unui abonament este de 200 lei.

Această Revistă se publică în Buenos-Aires, Republica Argentina.

Pentru anul al X-lea care a început în Martie 1937, s'au primit până acum la Redacţia „R. M. T." următoarele abonamente:

1. Locotenent *Costăchescu Constantin,* Distrugătorul *„Regina Maria"*, Constanţa.
2. Profesor *I. Nemet,* Casa învăţătorilor, str. Remus, Timişoara.
3. *Teofil Vescan,* Calea Regele Ferdinand No. 110, Cluj.
4. Profesor *Spiridon Ghiţescu,* liceul de băeţi din Mizil.
5. Student *Nichita Bododea,* Bulevardul Al. I. Cuza No. 27, Bucureşti.
6. Prof. *Sergescu P.,* Universitatea, Cluj.

Răspundem pe această cale, la toţi acei corespondenţii, care se plâng că anumite probleme nu le-au fost considerate, că aceasta se datoreşte sau faptului că acele soluţiuni au sosit întârziate, sau au fost greşite, sau n'au sosit de loc.

Evident că astfel de probleme nu pot fi luate, în seamă.

Legându-se colecţia R. M. T., anul XV, în volum şi rămânând numere răzleţe care nu au putut fi legate, putem trimete corespondenţilor noştri numere care eventual le lipsesc din colecţie în schimbul sumei de 10 lei. Doritorii se vor adresa administraţiei revistei, trimiţând suma prin mandat poştal.

Rugăm călduros pe corespondenţii noştrii să facă cunoscut această REVISTĂ colegilor şi camarazilor lor.

SPHINX

Revue mensuelle des questions récréatives

FONDÉE EN 1931

REVUE UNIQUE DANS SON GENRE
dans le monde entier

ABONNEMENTS:
1 an: Belgique, **30 fr.** France, **25 fr.**
Etranger, 7 **belgas**.

Administration:
SPHINX, Bruxelles 173, Avenue Longchamp

Toţi cei ce ne trimet articole, note, probleme propuse sau rezolvate, pentru a fi luate în consideraţie, sunt obligaţi a fi abonaţi la Revista Matematică din Timişoara.

Anunţăm că nu vom mai lua în considerare problemele rezolvate, iscălite de mai mulţi corespondenţi. Fiecare corespondent trebue să-şi redacteze problema rezolvată de el, şi s'o iscălească.

Fiecare problemă rezolvată, notă sau articol trebuesc scrise pe sferturi de coale de hârtie şi însoţite de enunţ. Problemele propuse trebuesc însoţite şi de soluţiile lor.

Fiecare problemă rezolvată trebuie să fie scrisă aparte şi să nu se continue cu alte probleme, căci nu se pot repartiza la numerile corespunzătoare, deci nu pot fi luate în seamă.

ANUL XVII. 15 SEPTEMVRIE 1937 No. 7.

REVISTA MATEMATICĂ

DIN

TIMIȘOARA

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA APARE ODATA PE LUNA.

PREȚUL UNUI NUMAR 12 LEI PREȚUL ABONAMENTULUI 100 LEI PE AN.

CUPRINSUL

1. G-L GH BUICLIU O PROBLEMA DE GEOMETRIE.

2. NOTE MATEMATICE: 15, 16.

3. BIBLIOGRAFIE.

4. PROBLEME REZOLVATE: 832, 923, 974, 1506, 1527, 1539, 1541, 1544, 1546.

5. PROBLEME PROPUSE: 1610-1617.

6. INFORMATIUNI.

TIMISOARA

Institut de Arte grafice Tipografia Românească

„Orice profesor de matematici, din orice colţ al ţării şi de la orice şcoală, trebuie să fie apostol al specialităţii sale. Din felul cald şi luminos cum îşi face lecţiile, din drumul drept şi demn pe care îl urmează în viaţă, trebuie să apară limpede că judecata matematică precisă şi sigură, curată ca cristalul, are o înaltă şi admirabilă valoare educativă pentru viaţă.

Adevărul curat, adevărul drept, adevărul luminos, să fie îndreptarul vieţei noastre. Aceasta să fie contribuţia specialităţii noastre la îndrumarea neamului românesc, pe calea care-i stă deschisă".

G. ŢIŢEICA

Manuscrisele destinate Revistei Matematice din Timişoara conţinând soluţiunile problemelor propuse şi probleme, note sau articole originale vor fi trimise pe adresa: **V. Alaci,** profesor Şcoala Politechnică, Timişoara.

Plata abonamentului precum şi reclamaţiunile de neprimirea Revistei vor fi adresate d-lui **Prof. C. Teodorescu,** Rectorul Şcoalei Politechnice din Timişoara.

Plata abonamentului se face prin CEC (Casa de economii şi cecuri poştale. unde revista are contul CEC No. 85208, sau prin mandat postal adresat d-lui Prof. C. TEODORESCU, Rectorul Şcoalei Politechnice din Timişoara.

Taxa de Membru în „Comitetul de Conducere al Revistei Matematice din Timişoara" este pentru anul XVII, de 200 (două sute) lei.

Colecţia R. M. T., se găseşte la Administraţia Revistei, şi se poate procura în schimbul preţului:

Anul I, epuizat. Anii: II—XVI inclusiv, broşate, 120 lei fiecare.

ANUL XVII — NO. 7 TIMISOARA, 15 SEPTEMVRIE 1937

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA

APARE LA 15 A FIECAREI LUNI

PREŢUL UNUI NUMAR . . . . . 12 LEI
ABONAMENT ANUAL . . . . . 100 LEI
Abonamentele sunt socotite totdeauna dela 15 Martie

REDACŢIA: Prof. V. ALACI
Şcoala Politechnică din Timişoara.
ADMINISTRAŢIA: Prof. C. TEODORESCU
Rectorul Şcoalei Politechnice din Timişoara.

O PROBLEMĂ DE GEOMETRIE

De
G-L GH BUICLIU

1. Problema 923, a cărei soluţie se publică la pagina 79 din acest număr, cere să se demonstreze că patrulaterul C_1MNA_1, construit cum se arată în cele ce urmează, este un trapez şi că mijloacele laturilor paralele ale trapezului sunt pe înălţimea BB_1.

Cei 15 corespondenţi care au trimis soluţiuni la această problemă, au întrebuinţat raţionamente falşe şi paradoxuri cu care au ajuns la stereotipul *q. e. d.* pentru a arăta că MN este paralelă cu A_1C_1. Corespondenţii s-au lăsat ademeniţi de afirmaţia din enunţul problemei, al cărei autor li-a însoţit cu o demonstraţie falşă, care se termina cu acelaşi fatal *q. e. d.* Unii corespondenţi au însoţit soluţiile cu figuri făcute aproximativ. Alţii au desenat figuri foarte exacte în care MN şi A_1C_1 se întâlneau chiar pe foaia figurei şi totuşi au afirmat *q. e. d.*

Este adevărat că în geometrie se demonstrează proprietăţi exacte pe figuri falşe, dar nu este mai puţin adevărat că pe o figură exactă şi corect construită, nu se poate demonstra că două drepte care se întâlnesc sunt paralele, fără să fi schimbat în prealabil definiţia dreptelor paralele.

Dacă paradoxurile întrebuinţate de cei 15 corespondenţi ar prezenta vre-un interes, le-aşi publica sub formă de recreaţii matematice. E prea scump spaţiul de care dispunem pentru a o face. De aceia prefer să arăt cum se examinează o problemă de genul problemei 923. Trebue să menţionez mai întâi că însuşi propunătorul problemei a făcut greşeli pentru a ajunge să enunţe punctele 1° şi 2°.

2. *Fie* A_1, B_1, C_1 *picioarele înălţimelor triunghiului* ABC *cu ortocentrul în* H. *Se proectează* B_1 *în* S *şi* T *pe* AB *şi* AC *şi se înseamnă cu* M *şi* N *intersecţia lui* AH *cu* B_1S *şi a lui* CH *cu* B_1T. (Fig. 1.)

Acestea sunt construcţiile din enunţul problemei 923 în care se cere la punctul 1°. *să se demonstreze că patrulaterul* C_1MNA_1 *este un trapez.*

De la început se vede că nu se precizează care sunt laturile paralele ale presupusului trapez. Va trebui deci să examinăm două cazuri: întâi când MN este paralelă cu A_1C_1 şi apoi când A_1N este paralelă cu C_1M.

Cazul I. Dacă MN este paralelă cu A_1C_1, atunci

$$\sphericalangle HMN = \sphericalangle HA_1C_1. \tag{1}$$

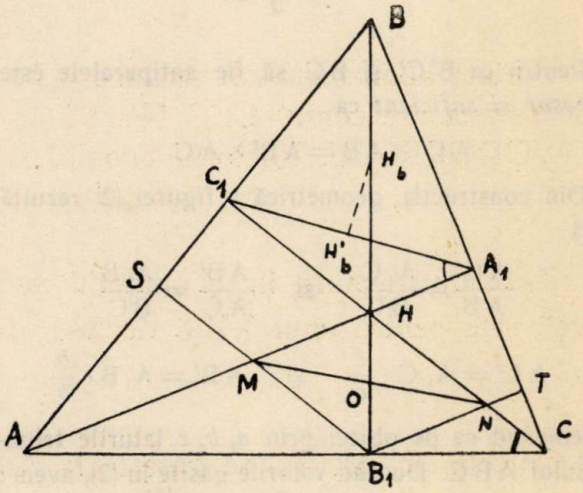


Fig. 1

Dar patrulaterul AC_1A_1C fiind inscriptibil

$$\sphericalangle AA_1C_1 = \sphericalangle HA_1C_1 = \sphericalangle HCA$$

şi comparând cu (1), rezultă că în cazul I

$$\sphericalangle HMN = \sphericalangle HCA,$$

adică patrulaterul $AMNC$ este inscriptibil.

Se observă că în triunghiul BHC punctul B_1 este piciorul înălțimei din vârful H, iar M și N sunt vârfurile paralelogramului construit pe înălțime ca diagonală și pe laturile adiacente ca direcție.

Să considerăm în general (fig. 2) un triunghiu ABC, iar din piciorul A_1 al înălțimei AA_1 să ducem paralelele A_1B', A_1C' la laturile AB și AC. Ne întrebăm *în ce caz* $BC'B'C$ *este inscriptibil* sau ceia ce este tot una *în ce caz* $B'C'$ *este antiparalelă cu* BC *în unghiul* A.

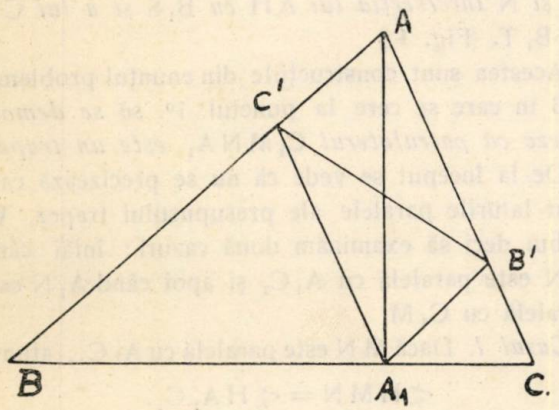


Fig 2.

Pentru ca $B'C'$ și BC să fie antiparalele este *necesar și suficient* ca

$$AC' \times AB = AB' \times AC. \tag{2}$$

Din construcția geometrică a figurei (2) rezultă însă

$$\frac{AC'}{AB} = \frac{A_1C}{BC} \quad \text{și} \quad \frac{AB'}{AC} = \frac{A_1B}{BC}$$

$$\overset{*}{*}\overset{*}{*} \quad AC' = A_1C \cdot \frac{c}{a} \quad \text{și} \quad AB' = A_1B \cdot \frac{b}{b}$$

însemnând ca de obicei prin a, b, c laturile triunghiului ABC. Ducând valorile găsite în (2), avem:

$$A_1C \cdot \frac{c^2}{a} = A_1B \frac{b^2}{a},$$

sau

$$c^2 . A_1C = b^2 . A_1B. \tag{3}$$

Relațiunea (3) definește condiția ca $B'C'$ să fie antiparalelă cu BC și reciproc. Avem însă

$$A_1C = b\cos C \quad \text{și} \quad A_1B = c\cos B,$$

care duse în (3) dau

$$b c^2 \cos C = b^2 c \cos B$$

$$\overset{*}{*}\overset{*}{*} \quad c\cos C = b\cos B,$$

sau înlocuind pe c și b prin $2R\sin C$ și $2R\sin B$, ajungem la

$$\sin 2C = \sin 2B, \tag{4}$$

care arată că triunghiul ABC este isoscel. Reciproc, făcând calculele în senz invers, dar plecând de la (4) se ajunge la (2).

Am găsit astfel teorema generală: *Ca* $B'C'$, *construit ca în* fig. 2, *să fi antiparalela lui* BC *în unghiul* A, *este necesar și suficient ca triunghiul* ABC *să fie isoscel cu vârful în* A.

Conchidem deci că în cazul fig. 1, construcția din enunțul problemei 923, dreapta MN *este paralelă cu* A_1C_1 *numai dacă* $AB = BC$.

Cazul II. Să vedem când A_1N și C_1M pot fi paralele. Pentru aceasta presupun că aceste drepte ar fi paralele. Atunci triunghiurile HMC_1 și HNA_1 ar fi asemeni și am avea

$$HM \times HN = HC_1 \times HA_1. \tag{5}$$

Pe figura 1 se vede că

$$HM = B_1N = B_1C \cdot \frac{\cos A}{\sin B}, \tag{6}$$

pentru că în triunghiul B_1NC, avem

$$\sphericalangle B_1CN = \sphericalangle ACC_1 = \frac{\pi}{2} - A$$

$$\sphericalangle B_1NC = \sphericalangle AHC = \pi - B.$$

Apoi din triunghiul CB_1B se scoate

$$B_1C = a\cos C,$$

așa că (6), devine

$$HM = \frac{a\cos A\cos C}{\sin B}.$$

La fel se găsește

$$HN = \frac{c\cos A\cos C}{\sin B}.$$

De unde se deduce că în general, într-un triunghiu oare care, avem

$$HM \times HN = \frac{ac\cos^2 A\cos^2 C}{\sin^2 B}. \tag{7}$$

Din triunghiul HC_1B în care unghiul BHC_1 este egal cu unghiul A se scoate

$$\frac{HC_1}{\cos A} = \frac{BC_1}{\sin A} = \frac{a\cos B}{\sin A}$$

$$HC_1 = \frac{a\cos A\cos B}{\sin A} \qquad (*)$$

şi la fel

$$HA_1 = \frac{c\cos B\cos C}{\sin C},$$

aşa că într-un triunghiu oare care

$$HA_1 \times HC_1 = \frac{ac\cos A\cos C\cos^2 B}{\sin A\sin C}. \qquad (8)$$

Dacă A_1N, C_1M sunt paralele, trebue să avem relaţia (5), sau reciproc, dacă avem relaţia (5) cele două drepte sunt paralele. Dar înlocuind în (5) membrul I şi II respectiv prin (7) şi (8) obţinem

$$\frac{ac\cos^2 A\cos^2 C}{\sin^2 B} = \frac{ac\cos A\cos C\cos^2 B}{\sin A\sin C}$$

$$\sin 2A \times \sin 2C = \sin^2 2B. \qquad (*)\ (9)$$

Am ajuns deci la concluzia *că dreptele* A_1N, C_1M *sunt paralele, când între unghiurile triunghiului* ABC *există relaţiunea* (9) *şi reciproc.*

Deci, concluzia generală pentru punctul 1° enunţat în problema 923 este: *figura* C_1MNA_1 *este un trapez, când triunghiul* ABC *este isoscel cu vârful în* B *sau când între unghiurile triunghiului* ABC *există relaţiunea* (9) *şi reciproc.*

Rămâne acum de cercetat dacă există triunghiuri între unghiurile cărora să avem relaţiunea (9). Această chestiunea o voi relua cu ocaziunea soluţiei ce voi da problemei 4849, pe care am propus-o în *Gazeta Matematică*, Vol. XLII, la pag. 671.

3. *Observaţiune.* Se ajunge la acelaşi rezultat ca la cazul I, dacă se înlocuesc în condiţiunea

$$HM \times HA = HN \times HC,$$

pe HM şi HN prin valorile calculate la cazul II, iar pe HA şi HC în funcţie de elementele triunghiului ABC.

4. Pentru punctul 2° enunţat în problema 923 trebue considerate separat cele două cazuri ca şi la numărul 2 precedent.

Cazul I, când A_1C_1 este paralelă cu MN. Triunghiul ABC fiind isoscel după cum s-a văzut, A_1BC_1 este de asemeni isoscel şi deci mijlocul H'_b al lui A_1C_1 este pe BH. Mijlocul O al lui MN este chiar intersecţia lui MN cu HB_1, căci HMB_1N este un paralelogram.

Cazul II, când A_1N este paralelă cu C_1M, adică în cazul triunghiurilor între unghiurile cărora există relaţia

$$\sin 2A \times \sin 2C = \sin^2 2B$$

voiu reveni cu ocazia soluţiei problemei 4849 din *Gazeta Matematică*, când se va vedea, că $B > \frac{\pi}{2}$ şi că N şi A_1 cad de o parte şi de alta a lui BH ca şi M şi C_1.

5. Ca încheiere voiu să arăt direct pe o cale mult mai simplă ca la punctul 2, că MN şi A_1C_1 nu sunt paralele de cât când ABC este isoscel.

Pentru aceasta fie H_b şi H'_b mijloacele lui BH şi A_1C_1. Patrulaterul BA_1HC_1 fiind inscriptibil în cercul de diametru BH, dreaptă $H_bH'_b$ va fi perpendiculară pe A_1C_1.

Presupun acum că $A_1C_1 \parallel MN$. In trapezul A_1C_1MN mijlocul O al lui MN se află pe BH, la intersecţia lui BH cu MN, pentru că HMB_1N este paralelogram. Se ştie că linia ce uneşte mijloacele laturilor paralele MN, A_1C_1 ale unui trapez A_1C_1MN, trece prin intersecţia H a diagonalelor. Deci H'_b se află pe BH şi BH este perpendiculară pe A_1C_1 în mijlocul său, adică A_1BC_1 este isoscel şi deci şi ABC *este isoscel.* S-a ajuns prin urmare, pe o cale mai simplă şi mai elementară la acelaşi rezultat ca la 2, *cazul I.* Această a două cale verifică rezultatele găsite pe prima cale.

NOTE MATEMATICE

15. — *Sur quelques équations diophantiennes renfermant des carrés et des bicarrés.*

1. Les identités

$$\begin{cases} (4r^4 - s^4)^2 + (2rs)^4 = (4r^4 + s^4)^2 \\ (2r^4 - 2s^4)^2 + (2rs)^4 = (2r^4 + 2s^4)^2 \\ [4rs(r^2 + s^2)]^2 + (r^2 - s^2)^4 = (r^4 + 6r^2s^2 + s^4)^4 \end{cases}$$

$$(r^4 - s^4)^2 + [2rs(r^2 + s^2)]^2 = (r^4 - 6r^2s^2 + s^4)^2 + [4rs(r^2 - s^2)]^2 = (r^2 + s^2)^4$$

fournissent une solution générale des équations

$$X^2 + Y^4 = Z^2 \quad \text{et} \quad X^2 + Y^2 = Z^4,$$

et aussi du système

$$X^2 + Y^2 = X'^2 + Y'^2 = Z^4.$$

Exemples numériques.

$r=2,\ s=1$	$r=3,\ s=2$
$63^2 + 4^4 = 65^2$	$77^2 + 6^4 = 85^2$
$30^2 + 4^4 = 34^2$	$130^2 + 12^4 = 194^2$
$40^2 + 3^4 = 41^2$	$312^2 + 5^4 = 313^2$
$15^2 + 20^2 = 7^2 + 24^2 = 5^4$	$65^2 + 156^2 = 119^2 + 120^2 = 13^4$

2. Pour obtenir des solutions entières des équations

$$X^2 + 2Y^4 = Z^2, \qquad X^4 + 2Y^2 = Z^2,$$
$$X^2 + 2Y^2 = Z^4,$$

on peut se servir des 3 identités suivantes que nous avons publiées dans Mathesis, 1937, page 275 :

$$(8r^4 - s^4)^2 + 2.(2rs)^4 = (8r^4 + s^4)^2,$$

$$(r^2 - 2rs - s^2)^4 + 2.[2(r^2 + s^2)(r^2 + 2rs - s^2)]^2 = [2(r^2 + s^2)^2 + (r^2 + 2rs - s^2)^2]^2,$$

$$[8r^2s^2 - (2r^2 - s^2)^2]^2 + 2.[4rs(2r^2 - s^2)]^2 = (2r^2 + s^2)^4.$$

Exemples numériques.

$r=2,\ s=1$	$r=3,\ s=2$
$127^2 + 2.4^4 = 129^2$	$158^2 + 2.6^4 = 166^2$
$1^4 + 2.70^2 = 99^2$	$7^4 + 2.442^2 = 627^2$
$17^2 + 2.56^2 = 9^4$	$23^2 + 2.84^2 = 11^4.$

3. Résolution en nombres entiers des équations

$X^4 + aY^2 = Z^2$, $X^2 + aY^4 = Z^2$, $X^2 + aY^2 = Z^4$,

a étant un entier donné.

Considérons l'identité

$$(r^2 - as^2)^2 + a(2rs)^2 = (r^2 + as^2)^2.$$

α) Posons d'abord $r^2 - as^2 = u^2$, il vient

$$u = r'^2 - as'^2, \quad s = 2r's', \quad r = r'^2 + as'^2;$$

on trouve

$$(r'^2 - as'^2)^4 + a[4r's'(r'^2 + as'^2)]^2 = [(r'^2 + as'^2)^2 + 4ar'^2s'^2]^2.$$

β) En posant $r = 2r'^2$, $s = s'^2$ ou $r = r'^2$, $s = 2s'^2$, il vient :

$$\begin{cases} (4r'^4 - as'^4)^2 + a.(2r's')^4 = (4r'^4 + as'^4)^4 \text{ ou} \\ (r'^4 - 4as'^4)^2 + a.(2r's')^4 = (r'^4 + 4as'^4)^2 \end{cases}$$

γ) Posons encore $r^2 + as^2 = v^2$, équation satisfaite pour les valeurs suivantes de r, s, v :

$$r = r'^2 - as'^2, \quad s = 2r's', \quad v = r'^2 + as'^2.$$

On a l'identité

$$[(r'^2 - as'^2)^2 - 4ar'^2s'^2]^2 + a.[4r's'(r'^2 - as'^2)]^2 = [r'^2 - as'^2)^2 + 4ar'^2s'^2]^2 = (r'^2 + as'^2)^4.$$

Exemples numériques.

$a=3,\ r'=2,\ s'=1$	$r'=3,\ s'=2,\ a=5$
$\alpha)$ $1^4 + 3.56^2 = 97^2$	$11^4 + 5.696^2 = 1561^2$ $(=2.436.721)$
$\beta)$ $61^2 + 3.4^4 = 67^2$	$61^2 + 5.6^4 = 101^2$ $(=10.201)$
$1^2 + 3.2^4 = 7^2$	$239^2 + 5.12^4 = 401^2$ $(=160.801)$
$\gamma)$ $47^2 + 3.8^2 = 7^4$	$599^2 + 5.264^2 = 29^4$ $(=707.281)$

4. Résolution en nombres entiers des équations diophantiennes

$X^4 + aY^2 = Z^2 + bT^2$ et $X^2 + aY^4 = Z^2 + bT^2$,

a et b étant des nombres entiers donnés.

$$(r^2 - at^2 + bs^2)^4 + a[4rt(r^2 + at^2 - bs^2)]^2 = [(r^2 + at^2 - bs^2)^2 + 4ar^2t^2 - 4br^2s^2]^2 + b[4rs(r^2 + at^2 - bs^2)]^2$$

$$\begin{cases} (4r^4 - at^4 + bs^2)^2 + a(2rt)^4 = (4r^4 + at^4 - bs^2)^2 + b(4r^2s)^2 \\ (r^4 - 4at^4 + bs^2)^2 + a(2rt)^4 = (r^4 + 4at^4 - bs^2)^2 + b(2r^2s)^2 \end{cases}$$

Solution de $X^2 + aY^4 = Z^2 + bT^4$

$$(4r^4 - at^4 + bs^4)^2 + a(2rt)^4 = (4r^4 + at^4 - bs^4)^2 + b(2rs)^4.$$

Exemples numériques.

$a=1,\ b=3,\ r=3,\ s=3,\ t=1$

$35^4 + 204^2 = 647^2 + 3.612^2$ $(=1.542.241)$

$350^2 + 6^4 = 298^2 + 3.108^2$ $(=123.796)$

$104^2 + 6^4 = 58^2 + 3 \cdot 54^2 \quad (= 12.112)$

$566^2 + 6^4 = 82^2 + 3 \cdot 18^4 \quad (= 321.652)$

A. GLODEN
(Luxenbourg)

16. — *Cercles associés à un triangle.*

Soient a, b, c $(a < b < c)$, et A_m, B_m, C_m les longueurs et les milieux des côtés BC, CA, AB d'un triangle ABC que, pour fixer les idées, nous supposons *acutangle*; (O), (I), (I_a), (I_b), (I_c) les cercles circonscrit et tritangents de rayon R, r, r_a, r_b, r_c; (D, E, F), (D_a, E_a, F_a), ..., Les points où les cercles tritangents touchent les côtés; M_a, M_b, M_c et M'_a, M'_b, M'_c, les points où les bissectrices intérieures ou extérieures des angles A, B, C recoupent le cercle (O).

1. Nous considérons les cercles (M_a) et (M'_a), (M_b) et (M'_b), (M_c) et (M'_c), de centres M_a, M'_a, M_b, M'_b, M_c, M'_c et de rayons ϱ_a, ϱ'_a, ϱ_b, ϱ'_b, ϱ_c, ϱ'_c, respectivement tangents aux côtés BA et AC, CB et BA, AC et CB. P_a et P'_a étant les contacts des cercles (M_a) et (M'_a) avec le côté AC du triangle ABC, par exemple, on a

$$\varrho_a = M_a P_a = \frac{1}{2}(IE + I_a E_a) = \frac{1}{2}(r + r_a),$$

$$\varrho'_a = M'_a P'_a = \frac{1}{2}(I_b E_b - I_c E_c) = \frac{1}{2}(r_c - r_b),$$

et des expressions analogues de ϱ_b et ϱ'_b, ϱ_c et ϱ'_c déduites de celles ci par des permutations circulaires convenables. Il en résulte que

$$\varrho_a + \varrho_b + \varrho_c = \frac{1}{2}(r + r_a + r + r_b + r + r_c) = 2(R + r),$$

$$\varrho'_a + \varrho'_b + \varrho'_c = \frac{1}{2}(r_c - r_b + r_c - r_a + r_b - r_a) = r_c - r_a.$$

On a aussi

$$A_m M_a + \varrho_a = \frac{1}{2}(r_a - r) + \frac{1}{2}(r + r_a) = r_a,$$

$$A_m M'_a + \varrho'_a = 2R - \frac{1}{2}(r_a - r) + \varrho'_a =$$

$$\frac{1}{2}(r_b + r_c + r_c - r_b) = r_c,$$

et, par analogie,

$$B_m M_b + \varrho_b = r_b, \qquad C_m M_c + \varrho_c = r_c,$$

$$B_m M'_b + \varrho'_b = r_c, \qquad C_m M'_c + \varrho'_c = r_a;$$

de sorte que *les tangentes menées des centres* I, I_a, I_b, I_c, *des cercles tritangents respectivement aux cercles* $[(M_a), (M_b), (M_c)]$, $[(M_a), (M'_b), (M'_c)]$, $[(M_b), (M'_c), (M'_a)]$, $[(M_c), (M'_b), (M'_b)]$ *sont parallèles aux côtés du triangle fondamental et les points de contacts sont sur les médiatrices de ces côtés.*

On a, en outre, α, β, γ étant les contacts des tangentes $I\alpha$, $I\beta$, $I\gamma$ aux cercles (M_a), (M_b), (M_c),

$$\overline{I\alpha} + \overline{I\beta} + \overline{I\gamma} = \overline{A_m D_a} + \overline{B_m E_b} + \overline{C_m F_c} =$$

$$\frac{1}{2}(b - c + c - a + a - b) = 0.$$

2. Les polaires Δ_a, Δ_b, Δ_c des sommets A, B, C, par rapport aux cercles (M_a), (M_b), (M_c) coïncident avec les droites de *Simson* des points M_a, M_b, M_c pour le triangle ABC. Ces droites passent respectivement en A_m, B_m, C_m, sont perpendiculaires aux bissectrices intérieures des angles des triangles ABC, $A_m B_m C_m$, et forment donc, par leurs intersections deux à deux, un triangle $M''_a M''_b M''_c$ dont les côtés sont équipollents à ceux du triangle $M'_a M'_b M'_c$.

Les polaires Δ'_a, Δ'_b, Δ'_c des sommets A, B, C, par rapport aux cercles (M'_a), (M'_b), (M'_c), parallèles aux bissectrices intérieures des triangles ABC, $A_m B_m C_m$, sont les droites de *Simson* des points M'_a, M'_b, M'_c, et passent respectivement par A_m, B_m, C_m. Il en résulte que Δ'_a, Δ'_b, Δ'_c sont perpendiculaires à Δ_a, Δ_b, Δ_c et concourent au centre I_1 du cercle inscrit au triangle $A_m B_m C_m$. Ce point est d'ailleurs le milieu du segment rectiligne joignant l'orthocentre H du triangle ABC au centre O' du cercle circonscrit au triangle $I_a I_b I_c$: autrement dit, I_1 coïncide avec le centre du cercle de *Taylor* du triangle $I_a I_b I_c$.

3. Les bissectrices intérieures AM_a, BM_b, CM_c du triangle ABC étant perpendiculaires sur les côtés $M'_b M'_c$, $M'_c M'_a$, $M'_a M'_b$ du triangle $M'_a M'_b M'_c$, il s'ensuit, en vertu d'une propriété connue, que les droites de *Simson* des extrémités M_a, M_b, M_c des diamètres du cercle (O), perpendiculaires à BC, CA, AB, concourent respectivement avec les droites

de *Simson* Δ'_b et Δ'_c, Δ'_c et Δ'_a, Δ'_a et Δ'_b des points M'_b et M'_c, ...; de sorte que le point I_1 de concours des droites $\Delta'_a \equiv A_m I_1$, $\Delta'_b \equiv B_m I_1$, $\Delta'_c \equiv C_m I_1$ coïncide avec l'orthocentre du triangle $M''_a M''_b M''_c$ qui est, par suite, le transformé du triangle $M'_a M'_b M'_c$ par une translation de direction $O'H$ et d'amplitude $O'I_1 = I_1 H$. En outre, les sommets M''_a, M''_b, M''_c du triangle $M''_a M''_b M''_c$, étant les intersections des droites de *Simson* (Δ_b, Δ_c), (Δ_c, Δ_a), (Δ_a, Δ_b), sont les orthopôles des côtés $M_b M_c$, $M_c M_a$, $M_a M_b$, par rapport au triangle fondamental, et le point I_1 de concours des droites de *Simson* Δ'_a, Δ'_b, Δ'_c est l'orthopôle des côtés $M'_b M'_c$, $M'_c M'_a$, $M'_a M'_b$ du triangle $M'_a M'_b M'_c$.

On montre aisément que les droites de *Simson* Δ''_a, Δ''_b, Δ''_c des sommets A, B, C, par rapport au triangle $M'_a M'_b M'_c$ sont parallèles aux hauteurs AA', BB', CC' du triangle ABC. Or, ces droites de *Simson* passant respectivement aux milieux des segments rectilignes AO', BO', CO', concourent au milieu I_1 de $O'H$.

On retrouve ainsi fort simplement, pour le triangle ABC qui nous occupe, le théorème suivant que nous avons obtenu par une autre methode :[1] *Les orthopôles des côtés du triangle complémentaire* $A_m B_m C_m$ *d'un triangle* ABC, *par rapport au triangle orthique* $A'B'C'$ *et les orthopôles des côtés du triangle orthique* $A'B'C'$ *par rapport au triangle complémentaire* $A_m B_m C_m$, *coïncident avec le milieu de la distance de l'orthocentre du triangle orthique au centre du cercle circonscrit au triangle fondamental.*

V. THÉBAULT
(LE MANS, FRANCE)

BIBLIOGRAFIE

1. *Gazeta Matematică*, anul XLII, No. 12, August 1937. Trigonometria lui *Gooden;* primul manual universitar de matematici din Ardeal, de *Victor Marian.* Asupra omologiei simple şi multiple, de *C. Ionescu-Bujor.* Asupra punctului *Lemoine*, de *N. N. Mihăileanu.* Note matematice. Chestiuni de examen. Bibliografie. Cereri. Diverse. Probleme rezolvate. Exerciţii. Probleme propuse. Tabla de materii.

2. *Revista Cercului de studii şi a Asociaţiei absolvenţilor şcoalei superioare P. T. T*, Timişoara, an. VI, No. 6–7–8, Iunie-Iulie-August 1937 (litografiat). Conţine articole de specialitate şi o pagină matematică.

3. *Ciel de Terre*, LII année, No. 10, Octobre 1936. Séances mensuelles des 23 Mai et 4 Jullet 1936. De croissance de la lumière naturelle au cours du crepuscule, par *S. Arend.* Description d'un astrolabe persan construit par Muhammad-Mehdi, par *Henri Michel.* Le temps en Août et Setembre 1936. Ephémérides pour Décembre 1936, par *Gaston Coutrez.* Notes. Bibliographie

4. *A. Gloden.* Formules générales pour des chaînes trigrades. (Extracted from, The Tôhoku Mathematical Journal, vol. 43, Part. II.)

5. *Th. Anghelutza.* Sur une propriété qui caractérise la transformation conforme. (Extrait des Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences, 19 Avril 1937)

6. *Th. Anghelutza.* Sur l'intégrale de *M. Denjoy.* (Extras din Mathematica, Vol. XII, 1936.)

7. *M. Ghermanescu.* Sur un théorème de M. *Mauro Picone.* (Rendiconti della R. Accademia nazionale dei Lincei, Iunie 1937.)

PROBLEME REZOLVATE

832*). — *Să se stabilească identitatea:*

$$\frac{1}{2}\left[\frac{1}{h_b^2 r_c^2}+\frac{1}{h_c^2 r_b^2}-\sum\left(\frac{1}{h_b r_c}-\frac{1}{h_c r_b}\right)^2\right]=$$

$$\sum\frac{1}{h_b h_c r_b r_c}-\frac{1}{2}\left[\frac{1}{r_a^2}\left(\frac{1}{h_b^2}+\frac{1}{h_c^2}\right)+\frac{1}{h_a^2}\left(\frac{1}{r_b^2}+\frac{1}{r_c^2}\right)\right],$$

notaţiile fiind cele obicinuite într'un triunghiu.

TRAIAN MARINEANU

Insemnând cu E primul membru al identităţii, putem scri succesiv :

$$E=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{h_b^2 r_c^2}+\frac{1}{h_c^2 r_b^2}-\frac{1}{h_b^2 r_c^2}-\frac{1}{h_c^2 r_b^2}-\frac{1}{h_c^2 r_a^2}-\frac{1}{h_a^2 r_c^2}-\frac{1}{h_a^2 r_b^2}-\frac{1}{h_b^2 r_a^2}\right)+$$

$$\frac{1}{h_b h_c r_b r_c}+\frac{1}{h_c h_a r_c r_a}+\frac{1}{h_a h_b r_a r_b}$$

[1]) *Mathesis*, 1933, (supplément, p. 36).

*) Enunţ rectificat.

$$= -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{h_b^2 r_a^2}+\frac{1}{h_c^2 r_a^2}+\frac{1}{h_a^2 r_c^2}+\frac{1}{h_a^2 r_b^2}\right)$$

$$+\sum\frac{1}{h_b h_c r_b r_c},$$

sau:

$$E=\sum\frac{1}{h_b h_c r_b r_c}-\frac{1}{2}\left[\frac{1}{r_a^2}\left(\frac{1}{h_b^2}+\frac{1}{h_c^2}\right)+\right.$$

$$\left.\frac{1}{h_a^2}\left(\frac{1}{r_b^2}+\frac{1}{r_a^2}\right)\right].$$

Identitatea dată este astfel stabilită.

Soluții date de d-nii: *Crivăț I. Vladimir, Ghișoiu I. Petre, Mihăileanu N. N., Popa Gh. Ioan* și *Rusu D. C-tin.*

923. — *Fie* A_1, B_1, C_1 *picioarele înălțimelor triunghiului* ABC. *Perpendicularele din* B_1 *pe* AB *și* BC *intersectează înălțimele duse din* A *și* C *în* M *și* N. *Să se demonstreze că:*

1°. *Patrulaterul* C_1MNA_1 *este un trapez.*

2°. *Mijloacele laturilor paralele ale trapezului se găsesc pe* BB_1.

3°. *In triunghiurile echilaterale, trapezul considerat este un dreptunghiu.*

VLADIMIR I. CRIVAT

Primele două părți nu sunt adevărate de cât în cazuri speciale după cum se vede din articolul ce se publică la pagina 73 din acest număr.

Pentru 3°. A_1, B_1, C_1 sunt mijloacele laturilor triunghiului ABC. Rezultă că M și N sunt mijloacele lui AH și CH și deci MN este perpendiculară pe BB_1 și egală cu A_1C_1 și cu jumătatea lui AC. La fel MC_1 și NA_1 sunt paralele cu BB_1 și deci perpendiculare pe A_1C_1 și MN. Deci figura MC_1A_1N este dreptunghiu.

S-au primit soluțiuni de la 15 rezolvitori, care au *demonstrat* (?!) ca și propunătorul că proprietățile sunt adevărate. Este probabil că restul de corespondenți, care s-au ocupat de această problemă, au văzut că proprietățile nu sunt adevărate, dar n-au încercat să caute în ce cazuri sunt adevărate.

974. — *Să se rezolve sistemul:*

$$\begin{cases} x(x+y+z)=ayz \\ y(x+y+z)=bzx \\ z(x+y+z)=cxy \end{cases}$$

N. N. MIHAILEANU

Impărțim prima ecuație prin a 2-a și a 3-a, apoi împărțim a 2-a ecuație prin a 3-a și obținem:

$$\begin{cases} \frac{x}{y}=\frac{a}{b}\cdot\frac{y}{x} \\ \frac{x}{z}=\frac{a}{c}\cdot\frac{z}{x} \\ \frac{y}{z}=\frac{b}{c}\cdot\frac{z}{y} \end{cases}$$

Acest sistem se mai poate scri:

$$(1)\qquad \begin{cases} bx^2-ay^2=0 \\ cx^2-az^2=0 \\ cy^2-bz^2=0 \end{cases}$$

Dacă înmulțim prima ecuație cu $-c$ și a 2-a cu b și le adunăm obținem:

$$a(cy^2-bz^2)=0.$$

Se vede că ecuația 3-a din sistemul (1) este o combinație liniară a primelor două ecuații, astfel că sistemul (1) este nedeterminat.

Din primele două ecuații a sistemului (1), obținem:

$$(2)\qquad \begin{cases} y=\pm x\sqrt{\frac{b}{a}} \\ z=\pm x\sqrt{\frac{c}{a}} \end{cases}$$

Dând lui x diferite valori, avem din (2) valorile corespunzătoare pentru y și z. Un sistem de soluții este de exemplu,

$$x=y=z=0.$$

Soluții date de d-nii: *Mereuță Emilian, Nicolaescu Stelian, Predoescu M. Traian* și *Russu D. C-tin.*

1506. — *Intr'un triunghiu* ABC, *in care* BD *este înălțimea dusă din* B, AE *este mediana corespunzătoare laturei* BC, *iar* CP *bisectoarea unghiului* C, *avem:*

1°. $\overline{BP}\cdot\overline{AC}\cdot\overline{OD}=2\overline{AP}\cdot\overline{OE}\cdot\overline{DC}$,

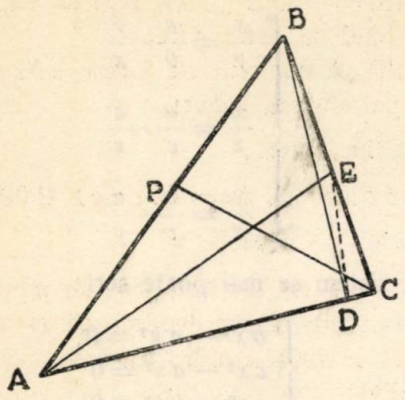
2°. $$\overline{AC}=\frac{\overline{AB}^2-\overline{BC}^2}{\overline{AD}-\overline{DC}},$$

O *fiind punctul de intersecție a lui* DE *cu* CP.

I. V. COJOCARU

1°. In triunghiurile CDE și CAB, bisectoarea

din C, împarte laturile opuse în părţi proporţionale cu laturile adiacente, astfel că avem:



$$\frac{\overline{OD}}{\overline{OE}}=\frac{\overline{DC}}{\overline{CE}} \text{ şi } \frac{\overline{BP}}{\overline{AP}}=\frac{\overline{BC}}{\overline{AC}}.$$

Multiplicând aceste egalităţi, ţinând seamă că $\overline{BC}=2\overline{CE}$ şi simplificând, obţinem:

$$\frac{\overline{BP}.\overline{OD}}{\overline{AP}.\overline{OE}}=\frac{\overline{BC}.\overline{DC}}{\overline{CE}.\overline{AC}}=\frac{2\overline{CE}.\overline{DC}}{\overline{CE}.\overline{AC}}=\frac{2\overline{DC}}{\overline{AC}}.$$

Această relaţie se mai poate scri:

$$\overline{BP}.\overline{AC}.\overline{OD}=2\overline{AP}.\overline{OE}.\overline{DC},$$

care este prima relaţie cerută.

2°. In triunghiurile dreptunghice ADB şi BDC, putem scri:

$$\overline{AB}^2=\overline{AD}^2+\overline{BD}^2 \text{ şi } \overline{BC}^2=\overline{DC}^2+\overline{BD}^2.$$

Scăzând aceste relaţii obţinem:

$$\overline{AB}^2-\overline{BC}^2=\overline{AD}^2-\overline{DC}^2=$$
$$(\overline{AD}+\overline{DC})(\overline{AD}-\overline{DC}).$$

De aci deducem:

$$(1)\qquad \overline{AD}+\overline{DC}=\frac{\overline{AB}^2-\overline{BC}^2}{\overline{AD}-\overline{DC}},$$

şi cum:

$$\overline{AD}+\overline{DC}=\overline{AC},$$

relaţia (1) devine:

$$\overline{AC}=\frac{\overline{AB}^2-\overline{BC}^2}{\overline{AD}-\overline{DC}}.$$

A 2-a relaţie din enunţ este astfel stabilită.

Soluţii date de d-ra: *Comloşan Cornelia* (studentă, Cluj) şi de d-nii: *Apostol Radu* (lic. Milit., N. Filipescu), *Baţiu C.* (lic. Loga, Timişoara), *Florescu L. Victor* (lic. Milit, N. Filipescu), *Gloden A.* (Luxembourg), *Lăzărescu Stelian* (lic. Milit., N. Filipescu), *Maşcas Gh. Petru* (Şc. Polit., Timişoara), *Matei D-tru, Moisovici Ştefan* (bacalaureat), *Negrea A. Leonte-Mircea* (Brăila), *Negulescu D. Ştefan* (lic. Milit., N. Filipescu), *Popescu-Zorica N. Alexandru* (lic. Iosif, Bucureşti), *Rădulescu Gh. Octavian* (lic. Milit., N. Filipescu), *Ripianu Andrei* şi *Vlad I. C. M.* (Sub-Lt).

1527. — *Să se arate că într'un triunghiu oarecare avem:*

$$m(m-1)\sin A+m(\sin B-\sin C)+\sin C>0,$$

ori care ar fi m real.

LOCOT. C. IONESCU-ŢIU

Imulţind inegalitatea cu 2R şi ţinând seamă de relaţiile cunoscute,

$$a=2R\sin A,\quad b=2R\sin B,\quad c=2R\sin C$$

obţinem:

$$m(m-1)a+m(b-c)+c\geqq 0,$$

sau:

$$(1)\qquad am^2-(a-b+c)m+c\geqq 0.$$

Rămâne să stabilim această inegalitate. Pentru aceasta considerăm ecuaţia de gradul al 2-lea în m:

$$(2)\qquad am^2-(a-b+c)m+c=0.$$

Realizantul acestei ecuaţii este:

$$(3)\qquad E=(a-b+c)^2-4ac=$$
$$(a-b+c+2\sqrt{ac})(a-b+c-2\sqrt{ac}).$$

Să arătăm că acest realizant este negativ. Observăm întâi că primul factor, $a-b+c+2\sqrt{ac}$ este pozitiv, căci într'un triunghiu $a+c>b$. Să cercetăm semnul celui de al 2-lea factor.

Pentru aceasta vom considera următoarele trei cazuri:

1°. $a<c$.

In acest caz, $\sqrt{ac}>a$ şi rezultă:

$$a-b+c-2\sqrt{ac}<a-b+c-2a=$$
$$c-(a+b)<0,$$

fiindcă, $c<a+b$.

2°. $a=c$.

In acest caz, avem:

$$a-b+c-2\sqrt{ac}=a-b+a-2a=-b<0.$$

3°. $a > c$.

In acest caz, $\sqrt{ac} > c$ şi rezultă

$$a - b + c - 2\sqrt{ac} < a - b + c - 2c = a - (b + c) < 0,$$

fiindcă, $a < b + c$.

Vedem dar, că în toate cazurile, factorul $a - b + c - 2\sqrt{ac}$ este negativ şi cum primul factor este pozitiv, urmează că realizantul dat de expresia (3) este negativ, $E < 0$.

Realizantul ecuaţiei (2) fiind negativ, primul său membru are semnul lui a, oricare ar fi m real, deci rezultă:

$$a m^2 - (a - b + c) m + c > 0.$$

Soluţii date de d-nii: *Andrunachievici Vladimir* (student, Iaşi), *Florescu Victor* (lic. Milit., N. Filipescu) şi *Tilică C. Ştefan* (lic. T-Severin).

1539. — *Să se arate că nu pot exista patrate şi cuburi de forma* $abab$; $abcabc$; $abcdabcd$; $abcdeabcde$.

IOAN CUREA

1. Numărul $abab$ se poate scri:

$$abab = ab \times 100 + ab = ab \times 101.$$

De aci observăm că numărul $abab$ patrat sau cub perfect are factorul prim 101; celalt factor ab ar trebui să conţină factorul 101 sau 101^2, ceea ce nu se poate, ab fiind de două cifre.

Rezultă dar că $abab$ nu poate fi patrat sau cub.

2. Numărul $abcabc$ se poate scri:

$$abcabc = abc \times 1000 + abc = abc \times 1001 = abc \times 7 \times 11 \times 13.$$

Cum $abcabc$ voim să fie patrat sau cub şi cum vedem că el are factorii primi 7, 11, 13, urmează că celalt factor abc trebuie să se dividă respectiv prin $7 \times 11 \times 13 = 1001$, sau prin $7^2 \times 11^2 \times 13^2 = 1001^2$, dar aceasta nu se poate, abc fiind de trei cifre.

Rezultă că nu putem avea numere de forma $abcabc$ patrate sau cuburi.

3. Numărul $abcdabcd$ se poate scri:

$$abcdabcd = abcd \times 10001 = abcd \times 73 \times 137.$$

Cum voim ca numărul $abcdabcd$ să fie patrat sau cub şi cum vedem că el are factori primi 73 şi 137, urmează ca celalt factor $abcd$ să se dividă respectiv prin $73 \times 137 = 10001$, sau prin $73^2 \times 137^2 = 10001^2$, dar aceasta nu se poate, $abcd$ fiind de patru cifre.

Rezultă că numerile de forma $abcdabcd$ nu pot fi patrate sau cuburi.

4. In fine, avem:

$$abcdeabcde = abcde \times 100001 = abcde \times 11 \times 9091.$$

Cum voim ca numărul $abcdeabcde$ să fie patrat sau cub şi cum vedem că el are factorii primi 11 şi 9091 urmează ca celalt factor $abcde$ să se dividă respectiv prin $11 \times 9091 = 100001$, sau prin $11^2 \times 9091^2 = 100001^2$, dar aceasta nu se poate, $abcde$ fiind de cinci cifre.

Rezultă că nu putem avea patrate şi cuburi de forma $abcdeabcde$.

Soluţie date de d-l: *Cozanacli V. Petre* (Chişinău).

Observare. S'a primit şi o soluţie nu destul de riguroasă.

1541. — *Să se stabilească identităţile:*

$$[(b-c)(c-a)+a-b]^2+\Sigma(a^2-c+b)^2=$$
$$[(b-c)(c-a)-a+b]^2+\Sigma(a^2+c-b)^2;$$
$$[(b-c)(c-a)+a-b]^2+\Sigma(ab-b+a)^2=$$
$$[(b-c)(c-a)-a+b]^2+\Sigma(ab+b-a)^2;$$
$$[a+b+c+(a-b)(b-c)(c-a)]^2+\Sigma(a^3-c+b)^2=$$
$$[a+b+c-(a-b)(b-c)(c-a)]^2+\Sigma(a^3+c-b)^2;$$
$$[ab+bc+ca+(b-c)(c-a)(a-c)]^2+$$
$$\Sigma(a^2b^2-b+a)^2=[ab+bc+ac-$$
$$(b-c)(c-a)(a-c)+\Sigma(a^2b^2+b-a)^2$$

A. GLODEN

1. Prima identitate se mai poate scri:

$$[(b-c)(c-a)+a-b]^2-[(b-c)(c-a)-(a-b)]^2=$$
$$\Sigma[a^2+c-b)^2-(a^2-c+b)^2].$$

Descompunând, diferenţele de patrate din ambii membrii, în produse corespunzătoare şi simplificând, avem:

$$4(a-b)(b-c)(c-a)=4\Sigma a^2(c-b),$$

sau:

(1) $(a-b)(b-c)(c-a)=\Sigma a^2(c-b)$.

Rămâne să stabilim această identitate. In adevăr primul membru se mai poate scri:

$$(a-b)(b-c)(c-a)=(ab-ac-b^2+bc)(c-a)=$$
$$abc-ac^2-b^2c+bc^2-a^2b+a^2c+b^2a-abc=$$
$$a^2(c-b)+b^2(a-c)+c^2(b-a)=\Sigma a^2(c-b).$$

Identitatea (1) este stabilită, deci şi prima din enunţ.

2. A 2-a identitate din enunţ se mai poate scri:

$$[(b-c)(c-a)+a-b]^2-[(b-c)(c-a)-(a-b)]^2$$
$$=\Sigma[(ab+b-a)^2-(ab-b+a)^2].$$

Descompunând diferenţele de patrate în produse corespunzătoare şi simplificând, avem:

$$4(a-b)(b-c)(c-a)=4\Sigma ab(b-a)$$

sau:

(2) $(a-b)(b-c)(c-a)=\Sigma ab(b-a)$

Rămâne să stabilim aceasta identitate. Observăm că primul membru se mai poate scri:

$$(a-b)(b-c)(c-a)=$$
$$abc-ac^2-b^2c+bc^2-a^2b+a^2c+b^2a-abc=$$
$$ab(b-a)+bc(c-b)+ca(a-c)=\Sigma ab(b-a).$$

Identitatea (2) şi deci a 2-a din enunţ este stabilită.

3. A 3-a identitate din enunţ se mai poate scri:

$$[a+b+c+(a-b)(b-c)(c-a)]^2$$
$$-[a+b+c-(a-b)(b-c)(c-a)]^2$$
$$=\Sigma[(a^3+c-b)^2-(a^3-c+b)^2].$$

Descompunând diferenţele de patrate în produse corespunzătoare şi simplificând, avem:

(3) $(a+b+c)(a-b)(b-c)(c-a)=\Sigma a^3(c-b)$.

Rămâne să stabilim această identitate. Pentru aceasta dezvoltăm membrul al 2-lea şi observăm că putem scri succesiv:

$$\Sigma a^3(c-b)=a^3c-a^3b+b^3a-b^3c+c^3b-c^3a=$$
$$ac(a-c)(a+c)-b(a^3-c^3)+b^3(a-c)=$$
$$(a-c)[ac(a+c)-b(a^2+ac+c^2)+b^3]=$$
$$(a-c)[a^2(c-b)+ac(c-b)-b(c^2-b^2)]=$$
$$(c-a)(b-c)[a^2+ac-b(c+b)]=$$
$$(c-a)(b-c)[a(a+b+c)-b(a+b+c)]=$$
$$(a+b+c)(a-b)(b-c)(c-a).$$

Astfel identitatea (3) este stabilită, deci este stabilită şi a 3-a identitate din enunţ.

4. A 4-a identitate din enunţ se mai poate scri:

$$[ab+bc+ca+(b-c)(c-a)(a-b)]^2-$$
$$[ab+bc+ca-(a-b)(b-c)(c-a)]^2$$
$$=\Sigma[(a^2b^2+b-a)^2-(a^2b^2-b+a)^2].$$

Descompunând diferenţele de patrate din ambii membrii în produse corespunzătoare şi simplificând avem:

(4) $(ab+bc+ca)(b-c)(c-a)(a-b)=\Sigma a^2b^2(b-a)$.

Rămâne să stabilim această identitate. Observăm că membrul al 2-lea se poate scri succesiv:

$$\Sigma a^2b^2(b-a)=a^2b^3-a^3b^2+b^2c^3-b^3c^2+c^2a^3-c^3a^2$$
$$=a^2(b^3-c^3)-b^2c^2(b-c)-a^3(b^2-c^2)=$$
$$(b-c)[a^2(b^2+bc+c^2)-b^2c^2-a^3(b+c)]=$$
$$(b-c)[b^2(a^2-c^2)-a^2c(a-c)-a^2b(a-c)]=$$
$$(b-c)(a-c)[b^2(a+c)-a^2c-a^2b]=$$
$$(b-c)(a-c)[b(ab+bc+ca)-(ab+bc+ca)]$$
$$=(ab+bc+ca)(b-c)(c-a)(a-b).$$

Astfel identitatea (4) este stabilită şi deci şi identitatea 4-a din enunţ.

Soluţii date de d-nii: *Apostol V. Radu* (lic. Milit., N. Filipescu), *Cazanacli V. Petre* (Chişinău), *Lăzărescu Stelian* (lic. Milit., N. Filipescu), *Lupescu Corneliu*, *Matei D. Dumitru*, (lic. Internat, Iaşi), *Milu I. Nicolae* (Şc. Preg. de Ofiţeri), *Negrea A. Leonte-Mircea* (Brăila), *Popescu Zorica Nicolae* (lic. Sf. Iosif, Bucureşti), *Ripianu Andrei*, *Stefănescu Costin* (lic. Milit., N. Filipescu), *Tica P. Marin-Gall* (Sub-Lt).

Observare. N'au putut fi luate în consideraţie unele soluţiuni care conţineau numai schiţe de demonstraţie.

1544. — *Se cere să se elimine unghiurile* A, B, C *ale unui triunghiu, din relaţiile:*

$$\alpha=\frac{\sin A}{\sin A+\cos A},\qquad \beta=\frac{\sin B}{\sin B+\cos B},$$

$$\gamma = \frac{\sin A}{\sin A + \sin B + \sin C}$$

V. ALACI

Aplicând acestor relaţii o proprietate cunoscută a proporţiilor şi unele dezvoltări uşor de urmărit, avem:

$$(1) \qquad \frac{\alpha}{1-\alpha} = \frac{\sin A}{\cos A}, \qquad \frac{\beta}{1-\beta} = \frac{\sin B}{\cos B},$$

$$\frac{\gamma}{1-\gamma} = \frac{\sin A}{\sin B + \sin C} = \frac{\sin A}{\sin B + \sin (A+B)} =$$

$$\frac{\sin A}{\sin B + \sin A \cos B + \sin B \cos A}.$$

Acum se observă că am putea afla din primele două relaţii din (1), valorile lui sin A, cos A, sin B, cos B pe care să le înlocuim apoi în ultima relaţie din (1).

In adevăr, prima relaţie din (1) se mai poate scrî:

$$\frac{\alpha^2}{1-2\alpha+2\alpha^2} = \frac{\sin^2 A}{\sin^2 A + \cos^2 A} = \sin^2 A,$$

deci:

$$\sin A = \frac{\alpha}{\pm\sqrt{1-2\alpha+2\alpha^2}}$$

şi atunci:

$$\cos A = \frac{1-\alpha}{\pm\sqrt{1-2\alpha+2\alpha^2}}.$$

Analog avem:

$$\sin B = \frac{\beta}{\pm\sqrt{1-2\beta+2\beta^2}},$$

$$\cos B = \frac{1-\beta}{\pm\sqrt{1-2\beta+2\beta^2}}.$$

Inlocuind aceste valori, cum am spus, în a 3-a relaţie din (1), obţinem:

$$\frac{\gamma}{1-\gamma} = \frac{\dfrac{\alpha}{\pm\sqrt{1-2\alpha+2\alpha^2}}}{\dfrac{\beta}{\pm\sqrt{1-2\beta+2\beta^2}} + \dfrac{\alpha(1-\beta)}{\pm\sqrt{(1-2\alpha+2\alpha^2)(1-2\beta+2\beta^2)}} + \dfrac{\beta(1-\alpha)}{\pm\sqrt{(1-2\alpha+2\alpha^2)(1-2\beta+2\beta^2)}}},$$

sau încă:

$$\frac{\gamma}{1-\gamma} = \frac{\pm\alpha\sqrt{1-2\beta+2\beta^2}}{\alpha+\beta-2\alpha\beta\pm\beta\sqrt{1-2\alpha+2\alpha^2}},$$

Aceasta este relaţia cerută, în care unghiurile A, B, C sunt eliminate.

Soluţii date de d-nii: *Kornis Ernest* (lic. Loga, Timişoara), *Matei D-tru* (bacalaureat), *Negrea A. Leonte-Mircea* (Brăila) şi *Zagaican Ilie* (Conductor de L. P.)

Observare. Unii din corespondenţi au înlocuit în relaţiele date, sin A, sin B, sin C, în funcţie de laturi sau alte elemente, crezând că în modul acesta se elimină unghiurile.

1546. — *Să se afle un cub de patru cifre, a cărui rădăcină cubică să fie egală cu suma primelor trei cifre ale cubului căutat.*

M. GHERMANESCU

Fie $abcd$ cubul cerut şi N rădăcina lui cubică. Conform enunţului avem:

$$N^3 = 1000a + 100b + 10c + d$$

$$N = a + b + c.$$

Prin scădere deducem:

$$N^3 - N = 999a + 99b + 9c + d,$$

sau:

$$(N-1)N(N+1) = 9(111a + 11b + c) + d.$$

Cum primul membru se divide prin 3, ca fiind produsul a trei numere consecutive, urmează că şi membrul al 2-lea se divide prin 3, deci rezultă

$$d = 0,\ 3,\ 6,\ 9.$$

Cubul căutat N^3 trebue să se termine cu 0, 3, 6, 9. De altă parte N^3 având patru cifre, avem:

$$10^3 \leq N^3 \leq 21^3.$$

Dintre cuburile cuprinse între 10^3 şi 21^3 inclusiv, numai

$$10^3,\ 16^3,\ 17^3,\ 19^3,\ 20^3$$

se pot termina cu 0, 3, 6, 9.

Dintre acestea, numai

$$19^3 = 6859$$

satisface şi condiţia:

$$19 = 6 + 8 + 5,$$

adică, rădăcina cubică a cubului cerut este egală cu suma primelor trei cifre.

Cubul de patru cifre cerut este astfel 6859.

Soluţii date de d-ra: *Comloşan Cornelia* (Cluj) şi de d-nii: *Amărăşteanu F. Marcel* (Şc. Polit., Bucureşti), *Anton G George* (lic. Bistriţa), *Berinde L. Titus*, *Cazanacli V. Petre* (Chişinău), *Milu I. Nicolae* (Şc. Preg. de Ofiţeri), *Negrea A. Leonte-Mircea* (Brăila), *Rădulescu Gh. Octavian* (lic. Milit., N. Filipescu), *Segal Zoe* (lic. Libros, Bucureşti), *Tilică C. Ştefan* (lic. T-Severin) şi *Zagaican Ilie* (Conductor de L. P.)

Observare. D-l *Negrea A. Leonte-Mircea* (Brăila), arată în mod analog că singurul cub de patru cifre, care are rădăcina cubică egală cu suma ultimelor trei cifre este,

$$3375 = 15^3.$$

PROBLEME PROPUSE

1610. — Să se demonstreze că

$$\frac{n-1}{n} \quad \text{şi} \quad \frac{n-2}{n},$$

sunt singurele fracţii de numitor n, egale cu rădăcina lor patrată cu aproximaţie de $\frac{1}{n}$.

G-L GH. BUICLIU

1611. — Fiind dată ecuaţia $x^2 + px + q = 0$ cu rădăcinele x_1, x_2, să se formeze ecuaţia de gradul al 2-lea cu rădăcinele:

$$X_1 = \frac{m}{x_1} + \frac{n}{x_2}, \qquad X_2 = \frac{n}{x_1} + \frac{m}{x_2}.$$

Să se caute relaţia dintre realizanţii lor.

Caz particular:

1°. $m = n$;

2°. $m = 3$, $n = 2$, $p = 1$, $q = -6$.

N. N. MIHAILEANU

1612. — Avem:

$$432 + 576 + 720 = 12^3$$

$$432^3 + 576^3 + 720^3 = 864^3.$$

Cum se obţin soluţiile generale a sistemului

$$A_1 + A_2 + A_3 + \cdots + A_z = B^n$$

$$A_1^n + A_2^n + A_3^n + \cdots + A_z^n = C^n, ?$$

A. MOESSNER

1613. — Să se stabilească identitatea:

$$\frac{1}{C_{2m}^p} - \frac{1}{C_{2m}^{p+1}} + \frac{1}{C_{2m}^{p+2}} + \cdots + (-1)^{m-p} \frac{1}{2C_{2n}^m} = \frac{2m+1}{2m+2} \cdot \frac{1}{C_{2m+1}^{p+1}}.$$

G. GALUGAREANU

1614. — Se dă un triunghiu oarecare ABC, în care se duc înălţimile AA', BB', CC'. Dacă se notează segmentele determinate de înălţimi pe laturile respective: $AC' = x_1$, $C'B = x'_1$, $BA' = x_2$, $A'C = x'_2$, $CB' = x_3$ şi $B'A = x'_3$, să se arate că există relaţiile:

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2$$

$$x_1 x_2 x_3 = x'_1 x'_2 x'_3$$

MIHAIL BOTEZ

1615. — Să se determine un patrulater astfel că cele două diagonale f şi g, precum şi segmentele k şi l, care unesc mijloacele laturilor opuse, să fie exprimate toate prin numere întregi.

A. GLODEN

1616. — Să se rezolve ecuaţiunea

$$\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{\sin 3x} = 2.$$

L-T. C. IONESCU-ŢIU

1617. — Se dă triunghiul dreptunghiu ABC şi se construeşte un alt triunghiu dreptunghiu având catetele $a + b - c$ şi $a + b + c$. Să se demonstreze că unghiurile ascuţite ale acestui din urmă triunghiu sunt, $45^0 - \frac{B}{2}$ şi $45^0 + \frac{B}{2}$. Notaţiile sunt cele obicinuite.

V. ALACI

Manuscrise primite de la corespondenții noștrii până la 10 a lunei curente și anume: Articole (A), Note (N), probleme propuse (P) și probleme rezolvate indicate prin numărul lor de ordine.

Apostol Radu (1467, 1550, 1556, 1569, 1573, 1574, 1583, 1585, 1592, 1596, 1601, 1608), *Anastasescu M. Mihail* (1467, 1580, 1587, 1597, 1598, 1599); *Berinde L. Titus* (P., 1543, 1549, 1550, 1551, 1554, 1555, 1556, 1562, 1565, 1567, 1568, 1569, 1570, 1572, 1573, 1574, 1576, 1578, 1579, 1580, 1582, 1583, 1584, 1585, 1587, 1591, 1592, 1593, 1602, 1603, 1606, 1608); *Czirzak V.* (1603); *Gloden A.* (N., 1569, 1601, 1608); *Grumăzescu Mircea* (P); *Jidanu C-tin* (P., 1551, 1552); *Lupescu Corneliu* (P., 1543, 1555, 1562); *Matei D. Dumitru* (P., 1516, 1529, 1533); *Murgu Marțian* (P., 1562, 1567, 1569, 1570, 1572, 1573, 1574, 1576, 1578, 1580, 1581, 1582, 158 , 1584, 1585, 1590, 1591); *Popovici Gabriel* (1562, 1574, 1581, 1587, 1590, 1591, 1592); *Ripianu Andrei* (1560, 1577, 1605), *Stamate I. Ionel* (1549, 1587, 1592); *Sărulesteanu I. Emanoil* (924), *Tilică C. Ștefan* (P., 1570, 1571, 1573, 1576, 1579, 1583, 1584, 1585, 1586, 1590, 1591, 592); *Zamfirescu G. I.* (P); *Zigu Segal* (P., 1598, 1601, 1603, 1608)

INFORMAȚIUNI

La Redacțiunea „Revistei Matematice din Timișoara" se primesc abonamente pentru:

BOLETIN MATEMATICO

ANUL AL X-LEA

care a început în Martie 1937.

Costul *special* a unui abonament este de 200 lei.

Această Revistă se publică în Buenos-Aires, Republica Argentina.

Pentru anul al X-lea care a început în Martie 1937, s'au primit până acum la Redacția „R. M. T." următoarele abonamente:

1. Locotenent *Costăchescu Constantin,* Distrugătorul *„Regina Maria"*, Constanța.
2. Profesor *I. Nemet,* Casa învățătorilor, str. Remus, Timișoara.
3. *Teofil Vescan,* Calea Regele Ferdinand No. 110, Cluj.
4. Profesor *Spiridon Ghițescu,* liceul de băeți din Mizil.
5. Student *Nichita Bododea,* Bulevardul Al. I. Cuza No. 27, București.
6. Prof. *Sergescu P.,* Universitatea, Cluj.

Răspundem pe această cale, la toți acei corespondenții, care se plâng că anumite probleme nu le-au fost considerate, că aceasta se datorește sau faptului că acele soluțiuni au sosit întârziate, sau au fost greșite, sau n'au sosit de loc.

Evident că astfel de probleme nu pot fi luate, în seamă.

Legându-se colecția R. M. T., anul XV, în volum și rămânând numere răzlețe care nu au putut fi legate, putem trimete corespondenților noștri numere care eventual le lipsesc din colecție în schimbul sumei de 10 lei. Doritorii se vor adresa administrației revistei, trimițând suma prin mandat poștal.

SPHINX

Revue mensuelle des questions récréatives

FONDÉE EN 1931

REVUE UNIQUE DANS SON GENRE
dans le monde entier

ABONNEMENTS:
1 an: Belgique, **30 fr.** France, **25 fr.**
Etranger, 7 **belgas.**

Administration:
SPHINX, Bruxelles 173, Avenue Longchamp

Toți cei ce ne trimet articole, note, probleme propuse sau rezolvate, pentru a fi luate în considerație, sunt obligați a fi abonați la Revista Matematică din Timișoara.

Anunțăm că nu vom mai lua în considerare problemele rezolvate, iscălite de mai mulți corespondenți. Fiecare corespondent trebue să-și redacteze problema rezolvată de el, și s'o iscălească.

Fiecare problemă rezolvată, notă sau articol trebuesc scrise pe sferturi de coale de hârtie și însoțite de enunț. Problemele propuse trebuesc însoțite și de soluțiile lor.

Fiecare problemă rezolvată trebuie să fie scrisă aparte și să nu se continue cu alte probleme, căci nu se pot repartiza la numerile corespunzătoare, deci nu pot fi luate în seamă.

ANUL XVII. 15 OCTOMVRIE 1937 No. 8.

REVISTA MATEMATICĂ

DIN

TIMIȘOARA

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA APARE ODATA PE LUNA.
PREȚUL UNUI NUMAR 12 LEI PREȚUL ABONAMENTULUI 100 LEI PE AN.

CUPRINSUL

1 N. N MIHAILEANU: ARTICOL DE TRIGONOMETRIE.
2. NOTE MATEMATICE: 17, 18.
3. BIBLIOGRAFIE.
4. PROBLEME REZOLVATE: 823, 853, 956, 1023, 1528.
5. PROBLEME PROPUSE: 1618-1624.
6. INFORMATIUNI.

TIMISOARA
Institut de Arte grafice Tipografia Românească

„Orice profesor de matematici, din orice colţ al ţării şi de la orice şcoală, trebuie să fie apostol al specialităţii sale. Din felul cald şi luminos cum îşi face lecţiile, din drumul drept şi demn pe care îl urmează în viaţă, trebuie să apară limpede că judecata matematică precisă şi sigură, curată ca cristalul, are o înaltă şi admirabilă valoare educativă pentru viaţă.

Adevărul curat, adevărul drept, adevărul luminos, să fie îndreptarul vieţei noastre. Aceasta să fie contribuţia specialităţii noastre la îndrumarea neamului românesc, pe calea care-i stă deschisă".

G. ŢIŢEICA

Avem plăcerea a anunţa că începând de la 15 Octomvrie 1937, mai face parte dintre membrii *„Revistei Matematice din Timişoara"* şi d-nul *Teofil Vescan*, profesor; licenţiat în Ştiinţe Fizice şi Matematice; preparator al Institutului de Fizică teoretică şi aplicată al Universităţii din Cluj.

Manuscrisele destinate Revistei Matematice din Timişoara conţinând soluţiunile problemelor propuse şi probleme, note sau articole originale vor fi trimise pe adresa: **V. Alaci,** profesor Şcoala Politechnică, Timişoara.

Plata abonamentului precum şi reclamaţiunile de neprimirea Revistei vor fi adresate d-lui **Prof. C. Teodorescu,** Rectorul Şcoalei Politechnice din Timişoara.

Plata abonamentului se face prin CEC (Casa de economii şi cecuri postale. unde revista are contul CEC No. 85208, sau prin mandat postal adresat d-lui Prof. C. TEODORESCU, Rectorul Şcoalei Politechnice din Timişoara.

Taxa de Membru în „Comitetul de Conducere al Revistei Matematice din Timişoara" este pentru anul XVII, de 200 (două sute) lei.

Colecţia R. M. T., se găseşte la Administraţia Revistei, şi se poate procura în schimbul preţului:

Anul I, epuizat. Anii: II—XVI inclusiv, broşate, 120 lei fiecare.

ANUL XVII — No. 8 TIMISOARA, 15 OCTOMVRIE 1937

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA

APARE LA 15 A FIECAREI LUNI

PREŢUL UNUI NUMAR . . . . . 12 LEI
ABONAMENT ANUAL . . . . . 100 LEI
Abonamentele sunt socotite totdeauna dela 15 Martie

REDACŢIA: Prof. V. ALACI
Şcoala Politechnică din Timişoara.
ADMINISTRAŢIA: Prof. C. TEODORESCU
Rectorul Şcoalei Politechnice din Timişoara.

ARTICOL DE TRIGONOMETRIE

DE

N. N. MIHAILEANU

Lucrarea de faţă are scopul să coordoneze câteva chestiuni cunoscute, să arate cum se poate obţine diferite relaţii, fără calcul, printr'o simplă transformare aplicată elementelor triunghiului de referinţă.

I. **Triunghiul de referinţă.** *Notaţii:* In triunghiul A B C, de unghiuri A, B, C, fie G centrul de greutate; H ortocentrul; O centrul cercului circumscris de rază R; I, I_a, I_b, I_c centrele cercurilor tritangente de raze r, r_a, r_b r_c; O_9 centrul cercului celor 9 puncte; A_m, B_m, C_m mijloacele laturelor; A_h, B_h, C_h picioarele înălţimilor; E_a, E_b, E_c mijloacele distanţelor A H, B H, C H; D, E, F contactele cercului (I); D_a, E_a, F_a, ... analoagele relativ la cercurilor (I_a), ..., O_a, O_b, O_c centrele cercurilor B H C, ..., A_1, B_1, C_1 şi A_2, B_2, C_2 picioarele bisectoarelor interioare şi exterioare pe cercul circumscris; T_a, T_b, T_c intersecţiile tangentelor la cercul (O) în vârfurile triunghiului; $\varrho(M)$ puterea punctului M la cercul (ϱ); (P, Q, R) distanţa punctului P la dreapta Q R. Apoi a, b, c laturele, p semiperimetrul, h_a, m_a, i_a, e_a, R_a... lungimea înălţimii, medianei, bisectoarei interioare, exterioare, diametrului, mărginite între vârful A şi baza B C, ...; S suprafaţa.

Aceleaşi notaţii accentuate se referă la unul oricare din triunghiurile obţinute prin transformare,

Formule:

$$a = 2R \sin A, \ldots$$

$$p = 4R \cos\frac{A}{2} \cos\frac{B}{2} \cos\frac{C}{2},$$

$$p - a = 4R \cos\frac{A}{2} \sin\frac{B}{2} \sin\frac{C}{2} \cdots$$

$$r = 4R \sin\frac{A}{2} \sin\frac{B}{2} \sin\frac{C}{2},$$

$$r_a = 4R \sin\frac{A}{2} \cos\frac{B}{2} \cos\frac{C}{2} \cdots$$

$$h_a = 2R \sin B \sin C, \ldots$$

$$m_a = R\sqrt{\sin^2 A + 4 \cos A \sin B \sin C}, \ldots$$

$$i_a = 2R \sin B \sin C \sec\frac{B-C}{2}, \ldots$$

$$e_a = 2R \sin B \sin C \operatorname{cosec}\frac{B-C}{2}, \ldots$$

$$R_a = 2R \sin B \sin C \sec(B-C), \ldots$$

$$S = 2R^2 \sin A \sin B \sin C.$$

Distanţe:

$$A H = 2R \cos A, \ H A_n = 2R \cos B \cos C,$$

$$A_n E_a = R \cos(B-C), B_n C_n = R \sin 2A$$

$$O A_m = R \cos A, \ A_m A_n = R \sin(B-C),$$

$$(G, B C) = \frac{2}{3} R \sin B \sin C, \ (O_9, B C) = \frac{R}{2} \cos(B-C),$$

$$A I = 4R \sin\frac{B}{2} \sin\frac{C}{2}, \quad A I_a = 4R \cos\frac{B}{2} \cos\frac{C}{2},$$

$$I I_a = 4R \sin\frac{A}{2}, \quad I_b I_c = 4R \cos\frac{A}{2}$$

$$O H = R\sqrt{1 - 8 \cos A \cos B \cos C}$$

$$O I = R\sqrt{1 - 8 \sin\frac{A}{2} \sin\frac{B}{2} \sin\frac{C}{2}},$$

$$O I_a = R\sqrt{1 + 8 \sin\frac{A}{2} \cos\frac{B}{2} \cos\frac{C}{2}}, \ldots$$

Puteri :

$$O(H) = 8R^2 \cos A \cos B \cos C,$$

$$O(G) = \frac{8R^2}{9}(1 + \cos A \cos B \cos C),$$

$$O(O_9) = \frac{3R^2}{4}(3 + 8 \cos A \cos B \cos C),$$

$$O(I) = 8R^2 \sin\frac{A}{2} \sin\frac{B}{2} \sin\frac{C}{2},$$

$$O(I_a) = 8R^2 \sin\frac{A}{2} \cos\frac{B}{2} \cos\frac{C}{2}.$$

II. Triunghiuri de transformare. 1°. *Triunghiul* AB_nC_n e invers asemenea cu ABC în raportul laturelor, $AB_n : AB = \cos A$, deci

$$B_nC_n = a \cos A;$$

diametrul

$$AH = 2R \cdot \cos A, \quad R' = R \cos A;$$

$$(E_a, B_nC_n) = (O, BC) \cdot \cos A = R \cos^2 A;$$

$$(A, B'C') = h_a \cos A = 2R \sin B \sin C \cos A;$$

segmentul de înălțime dintre A și $B'C'$ $= Ra \cdot \cos A$

$$= 2R \cos A \sin B \sin C \sec(B - C),$$

$$S' = \text{aria } AB_nC_n = 2R^2 \sin A \cos^2 A \sin B \sin C$$

2°. *Triunghiul* BHC e înscris în cercul *Carnot* (O_a), $R' = R$, unghiurile sunt :

$A' = 180^0 - A$, $B' = 90^0 - C$, $C' = 90^0 - B$,

ortocentrul $H' \equiv A$, deci,

$$BH = 2R' \sin B' = 2R \cos B, \quad CH = 2R \cos C$$

$$HA' = h'_a = 2R' \sin B' \sin C' = 2R \cos B \cos C$$

$$HA_m = m'_a = R\sqrt{\sin^2 A - 4 \cos A \cos B \cos C}$$

$$AO_a = H'O' = R\sqrt{1 + 8 \cos A \sin B \sin C}$$

$$\text{Aria } BHC = 2R^2 \sin A \cos B \cos C.$$

3°. *In triunghiul* AEF, unghiurile sunt :

$$A' = A, \quad B' = C' = 90^0 - \frac{A}{2};$$

diametrul AI, deci $R' = 2R \sin\frac{B}{2} \sin\frac{C}{2}$.

Rezultă

$$p - a = AE = AF = 2R' \sin B' = 4R \cos\frac{A}{2} \sin\frac{B}{2} \sin\frac{C}{2}$$

$$EF = 4R \sin A \sin\frac{B}{2} \sin\frac{C}{2};$$

Segmentul de bisectoare între A și EF

$$(A, EF) = h'_a = 4R \cos^2\frac{A}{2} \sin\frac{B}{2} \sin\frac{C}{2}$$

$$\text{Aria } AEF = 8R^2 \sin A \cos^2\frac{A}{2} \sin^2\frac{B}{2} \sin^2\frac{C}{2}.$$

4°. *Triunghiul* AE_aF_a asemenea cu precedentul de diametru AI_a, deci $R' = 2R \cos\frac{B}{2} \cos\frac{C}{2}$ și raportul de asemănare cu triunghiul AEF este $\operatorname{cotg}\frac{B}{2} \operatorname{cotg}\frac{C}{2}$. Elementele lui sunt ale triunghiului precedent multiplicate linear cu raportul de asemănare, folosim însă, tot metoda de până acuma :

$$p = AE_a = AF_a = 2R' \sin B' =$$

$$4R \cos\frac{A}{2} \cos\frac{B}{2} \cos\frac{C}{2}$$

$$E_aF_a = 2R' \sin A = 4R \sin A \cos\frac{B}{2} \cos\frac{C}{2},$$

segmentuî de bisectoare între A și E_aF_a,

$$(A, E_aF_a) = h'_a = 4R \cos^2\frac{A}{2} \cos\frac{B}{2} \cos\frac{C}{2},$$

$$\text{Aria } AE_aF_a = 8R^2 \sin A \cos^2\frac{A}{2} \cos^2\frac{B}{2} \cos^2\frac{C}{2}.$$

5°. *Triunghiul* BIC cu unghiurile $A' = I = 90^0 + \frac{A}{2}$,

$$B' = \frac{B}{2}, \quad C' = \frac{C}{2},$$

diametrul cercului circumscris II_a, deci

$$R' = 2R \sin\frac{A}{2}$$

$$IA_m = m'_a = 2R \sin\frac{A}{2}\sqrt{\cos^2\frac{A}{2} - 4 \sin\frac{A}{2} \sin\frac{B}{2} \sin\frac{C}{2}}$$

$$DA_m = A'_nA'_m = 2R \sin\frac{A}{2} \sin\frac{B-C}{2},$$

segmentul de bisectoare între I și BC

$$R'_a = 4R \sin\frac{A}{2} \sin\frac{B}{2} \sin\frac{C}{2} \sec\frac{B-C}{2},$$

$$\text{Aria } BIC = 8R^2 \sin^2\frac{A}{2} \cos\frac{A}{2} \sin\frac{B}{2} \sin\frac{C}{2}.$$

6°. *Triunghiul* BI_aC e înscris în acelaş cerc cu precedentul $R' = 2R' \sin\frac{A}{2}$, cu unghiurile,

$$A' = I_a = 90^0 - \frac{A}{2},\quad B' = 90^0 - \frac{B}{2},\quad C' = 90^0 - \frac{C}{2},$$

deci:

$$BI_a = 2R' \sin C' = 4R \sin\frac{A}{2} \cos\frac{C}{2},$$

$$CI_a = 4R \sin\frac{A}{2} \cos\frac{B}{2},$$

$$I_a A_m = m'_a = 2R \sin\frac{A}{2}\sqrt{\cos^2\frac{A}{2} + 4\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}},$$

$$D_a A_m = A'_n A'_m = 2R \sin\frac{A}{2} \sin\frac{B-C}{2},$$

segmentul de bisectoare între I_a şi BC,

$$R'_a = 4R \sin\frac{A}{2} \cos\frac{B}{2} \cos\frac{C}{2} \sec\frac{B-C}{2},$$

$$\text{Aria } BI_aC = 8R^2 \sin^2\frac{A}{2} \cos\frac{A}{2} \cos\frac{B}{2} \cos\frac{C}{2}.$$

7°. *Triunghiul* BT_aC cu $A' = T_a = 180^0 - 2A$,

$$B' = A,\quad C' = A,$$

pentru a afla pe R', avem

$$a' = BC = 2R' \sin 2A = 2R \sin A, \text{ deci } R' = \frac{1}{2} R \sec A,$$

$$OT_a = 2R' = R \sec A.$$

$$(T_a, BC) = h'_a = b'_a = m'_a = R \sin^2 A \sec A,$$

$$T_aB = T_aC = 2R' \sin A = R \operatorname{tg} A,$$

$$\text{Aria } BT_aC = R^2 \sin^3 A \sec A.$$

8°. *Triunghiul ortic* $A_hB_hC_h$ cu unghiurile $A' = 180^0 - 2A, \ldots$, cercul circumscris (O_9), deci

$$R' = \frac{1}{2}R,\quad I' \equiv H,\quad I'_a \equiv A, \ldots,$$

$$B_nC_n = a' = R \sin 2A,$$

$$p' = 2R \sin A \sin B \sin C,$$

$$p' - a' = 2R \sin A \cos B \cos C,$$

$$r' = 2R \cos A \cos B \cos C,$$

$$r'_a = 2R \cos A \sin B \sin C,$$

$$h'_a = R \sin 2B \sin 2C,$$

$$m'_a = \frac{1}{2} R \sqrt{\sin^2 2A - 4 \cos 2A \sin 2B \sin 2C},$$

segmentul de înălţime între A_n şi B_nC_n,

$$i'_a = R \sin 2B \sin 2C \sec(B - C);$$

distanţa dela A_n la piciorul axului ortic $= (B', B_nC_n)$

$$e'_a = R \sin 2B \sin 2C \operatorname{cosec}(B - C);$$

$$R'_a = R \sin 2B \sin 2C \sec 2(B - C)$$

$$\text{Aria } A_nB_nC_n = \frac{1}{2} R^2 \sin 2A \sin 2B \sin 2C,$$

$$(O_9, B_nC_n) = (O, BC)' = \frac{1}{2} R \cos 2A,$$

$$AO_9 = I'_aO' = \frac{1}{2} R \sqrt{1 + 8 \cos A \sin B \sin C},$$

$$O_9(O) = O_9(H) = O'(I) = 2R^2 \cos A \cos B \cos C,$$

$$O_9(A) = O'(I_a) = 2R^2 \cos A \sin B \sin C.$$

9°. *Triunghiul antiortic* $I_aI_bI_c$ cu $R' = 2R$ e invers asemenea cu BCI_a, în raportul razelor $= \sin\frac{A}{2}$; faţă de triunghiul de referinţă se comportă ca ABC faţă de $A_nB_nC_n$. I e ortocentru, ABC triunghiul ortic,

$$I_bI_c = a' = 4R \cos\frac{A}{2},$$

$$p' = 8R \cos\left(45^0 - \frac{A}{4}\right) \cos\left(45^0 - \frac{B}{4}\right) \cos\left(45^0 - \frac{C}{4}\right),$$

$$p' - a' = 8R \cos\left(45^0 - \frac{A}{4}\right) \sin\left(45^0 - \frac{B}{4}\right) \sin\left(45^0 - \frac{C}{4}\right),$$

$$r' = 8R \sin\left(45^0 - \frac{A}{4}\right) \sin\left(45^0 - \frac{B}{4}\right) \sin\left(45^0 - \frac{C}{4}\right),$$

$$r'_a = 8R \sin\left(45^0 - \frac{A}{4}\right) \cos\left(45^0 - \frac{B}{4}\right) \cos\left(45^0 - \frac{C}{4}\right),$$

$$\text{aria } I_aI_bI_c = 8R^2 \cos\frac{A}{2} \cos\frac{B}{2} \cos\frac{C}{2},$$

$$AI_a = h'_a = 4R \cos\frac{B}{2} \cos\frac{C}{2},$$

$$A\,I = A'_n\,H' = 4\,R \sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2},$$

$$I\,I_a = H'\,A' = R \sin\frac{A}{2},$$

$$A\,I_b = A'_n\,B' = 2\,R' \sin C' \cos B' = 4\,R \cos\frac{C}{2}\sin\frac{B}{2},$$

$$A\,I_c = 4\,R \sin\frac{C}{2}\cos\frac{B}{2},$$

$$I_a\,A_2 = m'_a = 2\,R\sqrt{\cos^2\frac{A}{2} + 4\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}},$$

$$b'_a = 4\,R \cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}\sec\frac{B-C}{4},$$

$$R'_a = 4\,R \cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}\sec\frac{B-C}{2},$$

$$A\,A_2 = A'_n\,A'_m = 2\,R \sin\frac{B-C}{2},$$

$$A\,A_1 = A'_n\,E'_a = 2\,R \cos\frac{B-C}{2},$$

$$I\,A_2 = H'\,A'_m = 2\,R\sqrt{\cos^2\frac{A}{2} - 4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}},$$

$$O\,I = O'_9\,H' = \frac{1}{2}\,O'\,H' = R\sqrt{1 - 8\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}},$$

$$(O, I_b\,I_c) = (O_9, B\,C)' = R \cos\frac{B-C}{2}.$$

10°. *Triunghiul tangențial* $T_a\,T_b\,T_c$ omotetic cu $A_n\,B_n\,C_n$ în raportul razelor cercurilor înscrise $= \frac{1}{2}\sec A \sec B \sec C$; $A' = 180° - 2\,A, \ldots$

$$r' = 4\,R' \sin\frac{A'}{2}\sin\frac{B'}{2}\sin\frac{C'}{2} = R,$$

deci,

$$R' = \frac{1}{4}\,R \sec A \sec B \sec C.$$

$$T_b\,T_c = a' = R \sin A \sec B \sec C$$

$$p' = R\,\mathrm{tg}\,A\,\mathrm{tg}\,B\,\mathrm{tg}\,C$$

$$T_a\,B = T_a\,C = p' - a' = R\,\mathrm{tg}\,A$$

$$r' = R, \qquad r'_a = R\,\mathrm{tg}\,B\,\mathrm{tg}\,C$$

$$S' = R^2\,\mathrm{tg}\,A\,\mathrm{tg}\,B\,\mathrm{tg}\,C$$

$$h'_a = 2\,R \sin B \sin C \sec A$$

$$O\,T_a = I'\,A' = R \sec A.$$

11°. *Triunghiul contactelor* D E F cu

$$R' = r = 4\,R \sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2},$$

omotetic cu $I_a\,I_b\,I_c$ în raportul razelor cercurilor circumscrise $= 2 \sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$.

$$E\,F = a' = 4\,R \sin A \sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$$

$$p' = 16\,R \sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\cos\left(45° - \frac{A}{4}\right)\times$$
$$\cos\left(45° - \frac{B}{4}\right)\cos\left(45° - \frac{C}{4}\right),$$

$$p' - a' = 16\,R \sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\cos\left(45° - \frac{A}{4}\right)\times$$
$$\sin\left(45° - \frac{B}{4}\right)\sin\left(45° - \frac{C}{4}\right),$$

$$r' = 16\,R \sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\sin\left(45° - \frac{A}{4}\right)\times$$
$$\sin\left(45° - \frac{B}{4}\right)\sin\left(45° - \frac{C}{4}\right),$$

$$r'_a = 16\,R \sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\sin\left(45° - \frac{A}{4}\right)\times$$
$$\cos\left(45° - \frac{B}{4}\right)\cos\left(45° - \frac{C}{4}\right),$$

$$\text{aria}\ D\,E\,F = 4\,R^2 \sin A \sin B \sin C \sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2},$$

$$(D, E\,F) = h'_a = 2\,R \sin\frac{A}{2}\sin B \sin C$$

$$(I, E\,F) = (O\ B\,C)' = 4\,R \sin^2\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}.$$

12°. *Triunghiul* $A_1\,B_1\,C_1$, *metaarmonic al lui* I, asemenea cu precedentul, în raportul $R : r$, $R' = R$,

$$B_1\,C_1 = a' = 2\,R \cos\frac{A}{2},$$

$$p' = 4\,R \cos\left(45° - \frac{A}{4}\right)\cos\left(45° - \frac{B}{4}\right)\cos\left(45° - \frac{C}{4}\right),$$

. . . . . .

omotetic cu $I_a\,I_b\,I_c$ de centru I — ortocentru comun — raport $\frac{1}{2}$; deci A I e înpărțită egal de $B_1\,C_1$,

$$A B_1 = I B_1 = H' B' = 2 R \sin \frac{B}{2}, \quad A C_1 = 2 R \sin \frac{C}{2}.$$

III. Relaţii între unghiuri. Să considerăm câteva relaţii într'un triunghiu:

$$\sin A + \sin B + \sin C = 4 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2},$$

$$\cos A + \cos B + \cos C = 1 + 4 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2},$$

$$\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C = 1 - 2 \cos A \cos B \cos C,$$

$$\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C = \operatorname{tg} A \operatorname{tg} B \operatorname{tg} C$$

$$\operatorname{tg} A \operatorname{tg} B + \operatorname{tg} B \operatorname{tg} C + \operatorname{tg} C \operatorname{tg} A = 1 + \sec A \sec B \sec C.$$

Luând alte unghiuri A', B', C' cu condiţia $A' + B' + C' = 180^0$, în relaţie cu A, B, C, aplicând relaţiile precedente şi în urmă revenind la unghiurile triunghiului de referinţă, se obţine fără calcul alte relaţii.

1°. Fie $A' = 2x$, $B' = 90^0 - x$, $C' = 90^0 - x$, cea mai generală transformare, pentru triunghiul isoscel, care transformă relaţiile precedente în identităţi,

$$\sin 2x + 2 \cos x = 4 \cos x \cos^2 \left(45^0 - \frac{x}{2}\right),$$

$$\cos 2x + 2 \sin x = 1 + 4 \sin x \sin^2 \left(45^0 - \frac{x}{2}\right),$$

$$\cos^2 2x + 2 \sin^2 x = 1 - 2 \cos 2x \sin^2 x,$$

$$\operatorname{tg} 2x + 2 \operatorname{cotg} x = \operatorname{tg} 2x \operatorname{cotg}^2 x,$$

$$2 \operatorname{tg} 2x \operatorname{cotg} x + \operatorname{cotg}^2 x = 1 + \sec 2x \operatorname{cosec}^2 x,$$

care se pot verifica şi direct.

Luând $x = \frac{1}{2} A$, cazul triunghiului II. 3°. AEF sau 4°. $A E_a F_a$ identităţile nu schimbă forma; cazul $x = A$ corespunde unghiurilor triunghiului BOC; pentru $x = 90^0 - A$. Cazul triunghiului II. 7°. $B T_a C$, deci $A' = 180^0 - 2A$, $B' = C' = A$ se obţine:

$$\sin 2A + 2 \sin A = 4 \sin A \cos^2 \frac{A}{2},$$

$$-\cos 2A + 2 \cos A = 1 + 4 \cos A \sin^2 \frac{A}{2},$$

$$\cos^2 2A + 2 \cos^2 A = 1 + 2 \cos^2 A \cos 2A,$$

$$\operatorname{tg} 2A - 2 \operatorname{tg} A = \operatorname{tg}^2 A \operatorname{tg} 2A,$$

$$-2 \operatorname{tg} 2A \operatorname{tg} A + \operatorname{tg}^2 A = 1 - \sec 2A \sec^2 A.$$

2°. Vom face transformările de forma,

$$A' = (n+1) 60^0 - n A, \ldots$$

Pentru $n = -1$, se regăseşte triunghiul de referinţă sau II. 1°. Pentru $n = 0$ dă triunghiul echilateral, pentru care se verifică,

$$3 \sin 60^0 = 4 \cos^3 30^0; \quad 3 \cos 60^0 = 1 + 4 \sin^3 30^0.$$

$$3 \cos^2 60^0 = 1 - 2 \cos^3 60,$$

$$3 \operatorname{tg} 60^0 = \operatorname{tg}^3 60, \quad 3 \operatorname{tg}^2 60^0 = 1 + \sec^3 60^0.$$

Pentru $n = 2$, dă triunghiul ortic şi tangenţial, pentru care, relaţiile devin:

$$\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C = 4 \sin A \sin B \sin C,$$

$$\cos 2A + \cos 2B + \cos 2C = -1 - 4 \cos A \cos B \cos C,$$

$$\cos^2 2A + \cos^2 2B + \cos^2 2C = 1 + 2 \cos 2A \cos 2B \cos 2C,$$

$$\operatorname{tg} 2A + \operatorname{tg} 2B + \operatorname{tg} 2C = \operatorname{tg} 2A \operatorname{tg} 2B \operatorname{tg} 2C,$$

$$\operatorname{tg} 2A \operatorname{tg} 2B + \operatorname{tg} 2B \operatorname{tg} 2A + \operatorname{tg} 2A \operatorname{tg} 2C = 1 - \sec 2A \sec 2B \sec 2C.$$

Pentru $n = \frac{1}{2}$, ceeace corespunde triunghiurilor antiortic, al contactelor şi II. 6°, 11° se obţine:

$$\cos \frac{A}{2} + \cos \frac{B}{2} + \cos \frac{C}{2} =$$

$$4 \cos \left(45^0 - \frac{A}{4}\right) \cos \left(45^0 - \frac{B}{4}\right) \cos \left(45^0 - \frac{C}{4}\right),$$

$$\sin \frac{A}{2} + \sin \frac{B}{2} + \sin \frac{C}{2} =$$

$$1 + 4 \sin \left(45^0 - \frac{A}{4}\right) \sin \left(45^0 - \frac{B}{4}\right) \sin \left(45^0 - \frac{C}{4}\right),$$

$$\sin^2 \frac{A}{2} + \sin^2 \frac{B}{2} + \sin^2 \frac{C}{2} = 1 - 2 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2},$$

$$\operatorname{cotg} \frac{A}{2} + \operatorname{cotg} \frac{B}{2} + \operatorname{cotg} \frac{C}{2} = \operatorname{cotg} \frac{A}{2} \operatorname{cotg} \frac{B}{2} \operatorname{cotg} \frac{C}{2},$$

$$\operatorname{cotg} \frac{A}{2} \operatorname{cotg} \frac{B}{2} + \operatorname{cotg} \frac{B}{2} \operatorname{cotg} \frac{C}{2} + \operatorname{cotg} \frac{C}{2} \operatorname{cotg} \frac{A}{2} =$$

$$1 + \operatorname{cosec} \frac{A}{2} \operatorname{cosec} \frac{B}{2} \operatorname{cosec} \frac{C}{2}.$$

3°. Luând $A' = \beta + \gamma + A$, $B - \beta$, $C - \gamma$, pentru $\beta = \gamma = 90^0$, deci $A', B', C' = 180^0 - A$

$90^0 - B$, $90^0 - C$, se obține pentru cazul II. 2°, relațiile :

$$\sin A + \cos B + \cos C =$$
$$4 \sin \frac{A}{2} \cos\left(45^0 - \frac{B}{4}\right) \cos\left(45^0 - \frac{C}{4}\right),$$
$$-\cos A + \sin B + \sin C =$$
$$1 + 4 \cos \frac{A}{2} \sin\left(45^0 - \frac{B}{4}\right) \sin\left(45^0 - \frac{C}{4}\right),$$
$$\cos^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C = 1 + 2 \cos A \sin B \sin C,$$
$$-\operatorname{tg} A + \operatorname{cotg} B + \operatorname{cotg} C = -\operatorname{tg} A \operatorname{cotg} B \operatorname{cotg} C,$$
$$-\operatorname{tg} A \operatorname{cotg} B + \operatorname{cotg} B \operatorname{cotg} C - \operatorname{tg} A \operatorname{cotg} C =$$
$$1 - \sec A \operatorname{cosec} B \operatorname{cosec} C,$$

și pentru,

$$\beta = \frac{B}{2}, \quad \gamma = \frac{C}{2},$$

deci

$$A' = 90^0 + \frac{A}{2}, \quad B' = \frac{B}{2}, \quad C' = \frac{C}{2},$$

unghiurile triunghiului B I C, se obține :

$$\cos \frac{A}{2} + \sin \frac{B}{2} + \sin \frac{C}{2} = 4 \cos\left(45^0 + \frac{A}{4}\right) \cos \frac{B}{4} \cos \frac{C}{4},$$
$$-\sin \frac{A}{2} + \cos \frac{B}{2} + \cos \frac{C}{2} =$$
$$1 + 4 \sin\left(45^0 + \frac{A}{4}\right) \sin \frac{B}{4} \sin \frac{C}{4},$$
$$\sin^2 \frac{A}{2} + \cos^2 \frac{B}{2} + \cos^2 \frac{C}{2} = 1 + 2 \sin A \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2},$$
$$-\operatorname{cotg} \frac{A}{2} + \operatorname{tg} \frac{B}{2} + \operatorname{tg} \frac{C}{2} = -\operatorname{cotg} \frac{A}{2} \operatorname{tg} \frac{B}{2} \operatorname{tg} \frac{C}{2},$$
$$-\operatorname{cotg} \frac{A}{2} \operatorname{tg} \frac{B}{2} + \operatorname{tg} \frac{B}{2} \operatorname{tg} \frac{C}{2} - \operatorname{cotg} \frac{A}{2} \operatorname{tg} \frac{C}{2} =$$
$$1 - \operatorname{cosec} \frac{A}{2} \sec \frac{B}{2} \sec \frac{C}{2}.$$

NOTE MATEMATICE

17. — *Sur le triangle podaire.*

1. Soient X Y Z le triangle podaire d'un point M du plan par rapport à un triangle A B C. $X_1 Y_1 Z_1$ le triangle podaire de M par rapport au triangle X Y Z. Le cercle circonscrit au triangle $X_1 Y_1 Z_1$ coupe les côtés Y Z, Z X, X Y du triangle X Y Z en trois points X_1', Y_1', Z_1' qui sont les sommets du triangle podaire du conjugué isogonal M_1' de M par rapport au triangle X Y Z ; il s'ensuit que les droites M X, M Y, M Z sont respectivement perpendiculaires à $Y_1' Z_1'$, $Z_1' X_1'$, $X_1' Y_1'$; par conséquent les triangles A B C et $X_1' Y_1' Z_1'$ qui ont leurs côtés respectivement parallèles, sont homothétiques, et en vertu du théorème de *Pilatte*[1],

$$(\text{aire } X Y Z)^2 = \text{aire } A B C \cdot \text{aire } X_1' Y_1' Z_1'.$$

Soient k la puissance du point M par rapport au cercle, de rayon R, circonscrit au triangle A B C ; S l'aire de ce triangle ; d la distance du centre O du cercle A B C au point M. On a, par suite,

$$(1) \quad \frac{k^2 S^2}{16 R^4} = S \cdot \text{aire } X_1' Y_1' Z_1', \quad \text{aire } X_1' Y_1' Z_1' = \frac{k^2 S}{16 R^4}$$

et le rapport d'homothétie des triangles $X_1' Y_1' Z_1'$ et A B C est

$$(2) \quad \left| \frac{k}{4 R^2} \right| = \left| \frac{R^2 - d^2}{2 R} \right|.$$

Le rayon ϱ_1 du cercle circonscrit au triangle $X_1' Y_1' Z_1'$ et par suite à $X_1 Y_1 Z_1$ est donné par la relation

$$(3) \quad \frac{\varrho_1}{R} = \left| \frac{k}{4 R^2} \right|, \quad \text{ou} \quad \varrho_1 = \left| \frac{k}{4 R} \right| = \left| \frac{R^2 - d^2}{4 R} \right|.$$[2]

2. En vertu d'une relation classique, on a

$$\left| \frac{X Y Z}{A B C} \right| = \left| \frac{R^2 - d^2}{4 R^2} \right| = \frac{\varrho_1}{R};$$

de sorte que

$$(4) \quad \frac{X Y Z}{\varrho_1} = \frac{S}{R}.$$

On retrouve ainsi très simplement ce théorème dû à *M. R. Goormaghtigh* :[3]

Dans tout triangle, il existe un rapport constant entre l'aire du triangle podaire d'un point

[1]) *Nouvelles Annales*, 1844—27.

[2]) *Journal de Vuibert*, 38-e année, 96. — *V. Thébault, Mathesis*, 1935 (supplément, p. 18).

[3]) *Mathesis*, 1934, 435. Nous en avons donné une autre démonstration, *Mathesis*, 1935, loc. cit.

quelconque et le rayon du cercle podaire de ce point par rapport à ce triangle podaire. Ce rapport constant est égal à celui de l'aire du triangle fondamental au rayon du cercle circonscrit à ce triangle.

3. Voici une autre démonstration simple de ce théorème.

Avec les notations précédentes, soient un triangle ABC, ($BC = a$, $CA = b$, $AB = c$) ; un point M de coordonnées normales absolues (x, y, z) ; M′ son conjugué isogonal de coordonnées (x', y', z') ; XYZ le triangle podaire de M pour le triangle ABC, $X_1Y_1Z_1$ le triangle podaire de M par rapport au triangle XYZ ; λ, μ, ν et λ', μ', ν' les abcisses des points A, B, C à partir de M et M′ sur MA, MB, MC et M′A, M′B, M′C ; $|k|$ et $|k'|$ les puissances de M et M′ par rapport au cercle circonscrit au triangle ABC. On a

$$YZ = |\lambda \sin A| = \left|\frac{a\lambda}{2R}\right|, \quad ZX = \left|\frac{b\mu}{2R}\right|,$$

$$XY = \left|\frac{c\nu}{2R}\right|,$$

et, puisque la valeur absolue de l'aire du triangle XYZ est

$$XYZ = \left|\frac{kS}{4R^2}\right|,$$

le rayon ϱ du cercle circonscrit au triangle XYZ a pour expression

$$\varrho = \left|\frac{\lambda\mu\nu}{2k}\right| = \left|\frac{\lambda'\mu'\nu'}{2k'}\right|.^{4)}$$

Par analogie,

$$\varrho_1 = \left|\frac{xyz}{2k_1}\right| = \left|\frac{xyz}{2xx'}\right| = \left|\frac{yz}{2x'}\right| = \left|\frac{zx}{2y'}\right| = \left|\frac{xy}{2z'}\right|,$$

$|k_1|$ étant la puissance de M pour le cercle $X_1Y_1Z_1$.

Or, comme x', y', z' sont proportionnelles à yz, zx, xy et que la somme des produits de ces distances respectivement par a, b, c donne 2S, on a aussi

$$2\varrho_1 = \frac{yz}{x'} = \frac{ayz + bzx + cxy}{2S} = 2R \cdot \frac{XYZ}{ABC};$$

de sorte que

$$\frac{XYZ}{\varrho_1} = \frac{ABC}{R} = \frac{S}{R}.$$

C. Q. F. D.

V. THÉBAULT
(LE MANS, FRANCE)

4) *V. Thébault, Mathesis*, 1932 (supplément).

18. — *Sur quelques systèmes indéterminés.*

1°. Nous avons publié (Boletin Matematico, 1937, p. 21) une solution générale du système

$$x^2 + 2t^2 = u^2, \qquad y^2 + 2t^2 = v^2.$$

Si dans les formules obtenues pour x et u on permute les paramètres q et r, t ne change pas. On a ainsi la solution suivante du système

$$x^2 + 2t^2 = u^2, \quad y^2 + 2t^2 = v^2, \quad z^2 + 2t^2 = w^2$$

$$x = (2q^2 - r^2)s^2, \quad y = 2s^4 - q^2r^2, \quad z = (2r^2 - q^2)s^2$$

$$u = (2q^2 + r^2)s^2, \quad v = 2s^4 + q^2r^2, \quad w = (2r^2 + q^2)s^2.$$

$$t = 2qrs^2.$$

Exemple numérique. $q = 2$, $r = 1$, $s = 3$

$$63^2 + 2.36^2 = 81^2 ; \quad 158^2 + 2.36^2 = 166^2 ;$$

$$18^2 + 2.36^2 = 54^2.$$

2°. En choisissant q et r de manière à transformer t en un carré T^2, on aura une solution du système :

$$x^2 + 2T^4 = u^2, \quad y^2 + 2T^4 = v^2, \quad z^2 + 2T^4 = w^2.$$

Remplaçons p. ex. q par $2q'^2$ et r par r'^2

$$x = (8q'^4 - r'^4)s^2, \quad y = 2s^4 - 4q'^4r'^4, \quad z = (2r'^4 - 4q'^4)s^2$$

$$u = (8q'^4 + r'^4)s^2, \quad v = 2s^4 + 4q'^4r'^4, \quad w = (2r'^4 + 4q'^4)s^2.$$

Exemples $q' = 2$, $r' = 1$, $s = 1$.

$$127^2 + 2.4^4 = 129^2 ; \quad 62^2 + 2.4^4 = 66^2$$

ou

$$127^2 + 2.2^8 = 129^2 ; \quad 62^2 + 2.2^8 = 66^2.$$

$$q' = 2, \quad r' = 1, \quad s = 3$$

$$1143^2 + 2.12^4 = 1161^2 ; \quad 98^2 + 2.12^4 = 226^2 ;$$

$$558^2 + 2.12^4 = 594^2.$$

La dernière relation se réduit en divisant tous les termes par 9^2, à $62^2 + 2.4^4 = 66^2$.

3°. Pour résoudre le système

$$X^4 + 2t^2 = u, \quad y^2 + 2t^2 = v^2, \quad z^2 + 2t^2 = w^2,$$

on posera $x = X^2$, donc $(2q^2 - r^2)s^2 = X^2$, relation satisfaite pour $2q^2 - r^2 = p^2$. Ceci est l'équation qui traduit un problème proposé par *Fibonacci* pour lequel on connaît la solution générale:

$$r = m^2 - 2mn - n^2$$
$$p = m^2 + 2mn - n^2$$
$$q = m^2 + n^2.$$

$$\begin{cases} X = (m^2 + 2mn - n^2)s \\ u = [2(m^2 + n^2)^2 + (m^2 - 2mn - n^2)^2]s^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 2s^4 - (m^2 + n^2)^2 (m^2 - 2mn - n^2)^2 \\ v = 2s^4 + (m^2 + n^2)^2 (m^2 - 2mn - n^2)^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} z = [2(m^2 - 2mn - n^2)^2 + (m^2 + n^2)^2]s^2 \\ w = [2(m^2 - 2mn - n^2)^2 + (m^2 + n^2)^2]s^2 \end{cases}$$

$$t = 2(m^2 + n^2)(m^2 - 2mn - n^2)s^2.$$

Exemple numérique. $m = 2$, $n = 1$, $s = 3$

$$21^4 + 2\,90^2 = 459^2; \quad 137^2 + 2.90^2 = 187^2;$$
$$207^2 + 2.90^2 = 243^2.$$

4°. Proposons-nous encore de résoudre en nombres entiers le système diophantien:

$$x^2 + 2t^2 = U^4, \quad y^2 + 2t^2 = v^2, \quad z^2 + 2t^2 = w^2.$$

Posons, à cet effet, $u = U^2$, donc $(2q^2 + r^2)s^2 = U^2$, relation satisfaite pour $2q^2 + r^2 = p^2$. Voici la solution de cette équation:

$$r = 2m^2 - n^2$$
$$q = 2mn$$
$$p = 2m^2 + n^2.$$

On aura donc

$$\begin{cases} x = [8m^2n^2 - (2m^2 - n^2)^2]s^2 \\ U = (2m^2 + n^2)s \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 2s^4 - 4m^2n^2(2m^2 - n^2)^2 \\ v = 2s^4 + 4m^2n^2(2m^2 - n^2)^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} z = [2(2m^2 - n^2)^2 - 4m^2n^2]s^2 \\ w = [2(2m^2 - n^2)^2 + 4m^2n^2]s^2 \end{cases}$$

$$t = 4mn(2m^2 - n^2)s^2.$$

Exemple numérique. $m = 2$, $n = 1$, $s = 3$.

$$153^2 + 2.504^2 = 27^4 \ (= 3^{12})$$
$$622^2 + 2.504^2 = 946^2$$
$$738^2 + 2.504^2 = 1026^2.$$

N. On peut obtenir, en employant le même procédé que plus haut, des solutions générales des trois systèmes:

$$\begin{cases} x^2 + 2T^k = u^2 \\ y^2 + 2T^k = v^2 \\ z^2 + 2T^k = w^2 \end{cases} \quad \begin{cases} x^k + 2t^2 = u^2 \\ y^2 + 2t^2 = v^2 \\ z^2 + 2t^2 = w^2 \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 + 2t^2 = U^k \\ y^2 + 2t^2 = v^2 \\ z^2 + 2t^2 = w^2, \end{cases}$$

l'exposant k étant de la forme 2^l.

A. GLODEN
(Luxembourg)

BIBLIOGRAFIE

1. *Gazeta Matematică*, An XLIII, No 1, Septemvrie 1937. Recreaţiuni (Supliment). Lista membrilor „Societăţii *Gazeta Matematică*". Suprafaţă de revoluţie aplicabilă pe alta asemenea ei, de *A. Myller*. Consideraţiuni practice la alcătuirea şi rezolvarea problemelor de matematică (urmare), de *I. Ionescu*. Concursul „*Gazetei Matematice*" din 1938. Premii, donaţii şi alte dispoziţii ale fondurilor „*Gazeta Matematică*", de Ing. *D. Stoica* şi Ing *D. Stan* Note matematice. Bibliografie Cereri. Diverse. Probleme rezolvate. Exerciţii. Probleme propuse.

2. *Boletin Matematico*. An X, No. 1, Martie 1937, (Buenos Aires). Iniţieri la al zecelea an al „Boletin Matematico", de *B. I. Baidaff*. Note matematice iscălite de *A. Gloden* şi *B. I. Baidaff*. Informaţiuni bibliografice. Miscelanea Probleme propuse

3. *Boletin Matematico*. An. X, No. 2, Aprilie 1937, (Buenos Aires). O teorie generală a numerelor complexe, de *L. Gutiérrez Novoa*. Asupra numerilor curioase, de *A. Moessner*. Note matematice, iscălite de *B. I Baidaff*. Informaţiuni bibliografice. Miscelanea. Probleme propuse.

4. *Ion Ionescu. Culegere de probleme de aritmetică. Partea I. Aritmetica raţionată.* Acest minunat volum de 303 pagini, începe prin un mic istoric şi o documentată şi substanţială teorie, în care sunt examinate pe larg diferitele metode de rezolvarea problemelor de aritmetică, precum şi critica acestor metode.

Nu găsesc destule cuvinte pentru a o recomanda cât mai călduros corespondenţilor noştrii şi tuturor elevilor de liceu, dat fiind că o pregătire bună aritmetică, asigură în mare parte pătrunderea mai cu uşurinţă a celorlalte părţi a matematicilor şi asigură un îndreptătit succes în ogorul matematic.

Privim această importantă lucrare ca un dar nepreţuit pentru elevii de liceu şi pentru toţi acei ce vor să cunoască mai amănunţit misterul numerilor. Ea izvoreşte din dragostea de şcoală românească, din compentenţa şi perseverenţa bine cunoscute a d-lui *I. Ionescu*, membru fondator al Revistei „*Gazeta Matematică*".

Al 2-lea volum ce va apărea în curând, va cuprinde: *Aritmetica comercială şi financiară*, având la început câte-va date asupra *Calculului numeric*. Al 3-lea volum va conţinea: *Aplicaţiuni de Aritmetică superioară şi de Teoria numerilor* şi va incepe cu o întroducere privitoare la dirijarea *Muncii matematice*.

5. *M. Ghermănescu. Curs de Analiză Matemetică, pentru uzul elevilor şcoalelor technice, superioare şi militare.* Acest important volum de 452 pagini, umple o lacună simţită în lumea studenţilor noştri, cărora se adresează,

căci le pune la îndemână în românește și în măsura de care au nevoie, partea de teorie clar expusă și de aplicațiuni bine alese, din acest minunat domeniu al *Analizei Matematice*. O recomandăm stăruitor studenților nostrii.

6. *N. Abramescu. Algebra Financiară, clasa VII a liceelor comerciale.* Ca și toate cărțile didactice ale d-lui profesor *Abramescu* și această carte, întocmită după ultima programă a liceelor comerciale, are aceiași claritate în expunere și este presărată de numeroase aplicațiuni și tabele necesare. Ea este izvorâtă, din permanenta sa dragoste de școală și din acel îndemn intern de a pune alesele sale calități didactice în serviciul școalei românești.

7. *V. Thébault. Sur une application du dernier théorème de Fermat.* (Paru en Août 1937. Extrait de L'Enseignement Mathématique, XXXVI^e Année 1937, No. 3 – 4)

8. *Eugen Gh. Mihailescu. Sur le principe de contractiction.* (Extrait des Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences de Roumanie, Tome I, 1936.)

9. *Eugen Gh. Mihailescu. Recherches sur la négation et l'équivalence dans le calcul des propositions.* (Extrait du Tome XXII, Année 1937, fasc. 2, Annales Scientifiques de l'Université de Jassy.)

10. *I. Lepși.* Buletinul muzeului național de istorie naturală din Chișinău.

PROBLEME REZOLVATE

823. — *Să se determine polinomul de gradul 5, $f(x)$ astfel ca $f(x)+ax^2+bx+c$ să fie divizibil prin $(x-\alpha)^4$, iar $f'(x)+dx+e$ să se dividă prin $(x-\beta)^3$.*

Care sunt condițiile ca problema să fie posibilă?

Să se considere apoi cazul particular $\alpha=1$, $\beta=-1$ și să se determine a, b, c, d astfel ca să avem

$$f(x)=A(x-\gamma)^5+B(x-\gamma)^3+C(x-\gamma)$$

și să se găsească în acest caz condiția ca ecuația $f(x)=0$ să aibă toate rădăcinile reale.

T. POPOVICIU

Soluția autorului. Trebue să avem

$$f'''(x)=C.(x-\alpha)(x-\beta).$$

O integrală particulară este de forma,

$$f^*(x)=C(x-\alpha)^4[\lambda(x-\alpha)+\mu(x-\beta)],$$

avem,

$$f^{*\prime}(x)=C(x-\alpha)^3[(5\lambda+\mu)(x-\alpha)+4\mu(x-\beta)]$$

$$f^{*\prime\prime}(x)=C(x-\alpha)^2[(20\lambda+8\mu)(x-\alpha)+12\mu(x-\beta)]$$

$$f^{*\prime\prime\prime}(x)=C(x-\alpha)[(60\lambda+36\mu)(x-\alpha)+24\mu(x-\beta)],$$

trebue deci ca,

$$60\lambda+36\mu=0, \qquad 24\mu=1.$$

$$\lambda=-\frac{1}{40}, \qquad \mu=\frac{1}{24}$$

$$f^*(x)=\frac{C}{120}(x-\alpha)^4[5(x-\beta)-3(x-\alpha)].$$

Soluția generală va fi

$$f(x)=f^*(x)+R(x),$$

$R(x)$ = polinom de gradul al 2-lea.

Din divizibilitatea prin $(x-\alpha)^4$ rezultă că

$$R(x)=-ax^2-bx-c,$$

avem apoi

$$f^{*\prime}(\beta)+d\beta+e-2a\beta-b=0$$

$$f^{*\prime\prime}(\beta)+d-2a=0.$$

Dar:

$$f^{*\prime}(\beta)=-\frac{C}{12}(\beta-\alpha)^4, \quad f^{*\prime\prime}(\beta)=-\frac{C}{6}(\beta-\alpha)^3.$$

Dacă $\alpha=\beta$, trebue să avem

$$d=2a, \qquad b=e$$

și broblema e banală. Să presupunem dar că $\alpha\neq\beta$, atunci

$$C=\frac{6(d-2a)}{(\beta-\alpha)^2}=\frac{12(d\beta+e-2a\beta-b)}{(\beta-\alpha)^3},$$

din care se deduce că

$$(1) \qquad \boxed{2(b-e)=(\beta+\alpha)(d-2a)}$$

La această condiție trebue să adăogăm

$$d\neq 2a.$$

Polinomul cerut este,

$$f(x)=\frac{(d-2a)(x-\alpha)^4}{20(\beta-\alpha)^2}(2x-5\beta+3\alpha)-ax^2-bx-c.$$

In cazul $\alpha+\beta=0$, trebue să avem $b=e$. Să presupunem că

$$\alpha=1, \qquad \beta=-1.$$

$$f(x)=\frac{(d-2a)(x-1)^4}{40}(x+4)-ax^2-bx-c.$$

Pentru ca $f(x)$ să fie de forma

$$A(x-\gamma)^5+B(x-\gamma)^3+C(x-\gamma),$$

observăm că trebue $\gamma = 0$, căci $f(x)$ n'are termen în x^4. Avem deci desvoltând

$$\frac{d-2a}{40}(x^5 - 10x^3 + 20x^2 - 15x + 4) - ax^2 - bx - c = Ax^5 + Bx^3 + Cx,$$

deci

$$\frac{d-2a}{2} = a \qquad d = 4a$$

$$\frac{d-2a}{10} = \frac{2a}{10} = \frac{a}{5} = c$$

$$a = 5c, \qquad d = 20c,$$

pe urmă

$$A = \frac{d-2a}{40} = \frac{c}{4}, \qquad B = -\frac{d-2a}{4} = -\frac{5c}{2},$$

$$C = -\frac{3}{8}(d-2a) - b = -\frac{15}{4}c - b.$$

Ecuaţia $f(x) = 0$ e echivalentă cu

$$x^5 - 10x^3 - \left(15 + \frac{4b}{c}\right)x = 0,$$

care are ca rădăcini

$$x_1 = 0, \qquad x_{2,3,4,5} = \pm\sqrt{5 \pm \sqrt{40 + \frac{4b}{c}}}$$

$$= \pm\sqrt{5 \pm 2\sqrt{10 + \frac{b}{c}}}.$$

Trebue întâi ca,

$$10 + \frac{b}{c} > 0, \qquad \frac{b}{c} \geqq -10,$$

pentru a avea 3 rădăcini reale şi

$$15 + \frac{4b}{c} < 0, \qquad \frac{b}{c} \leqq -\frac{15}{4},$$

pentru a avea toate rădăcinile reale, deci

$$\boxed{-\frac{15}{4} \geqq \frac{b}{c} \geqq -10}$$

853. — *Să se arate că polinomul,*

$$P(x) = (n+1)(x^n - 1) - 2[x(x^n - 1) - n(x-1)],$$

se divide cu $(x-1)^3$. *Se cere şi expresia câtului.*

CEZAR COSNITA

Scoţând $(x-1)$ factor comun, avem:

$$P(x) = (x-1)[(n+1)(x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + x + 1) - 2x(x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + x + 1) + 2n].$$

Polinomul $P(x)$ este astfel divizibil prin $(x-1)$, câtul fiind:

$$P_1(x) = (n+1)(x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + x + 1) - 2x(x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + x + 1) + 2n.$$

Pentru $x = 1$, avem:

$$P_1(1) = (n+1)n - 2n + 2n = n(n+1),$$

$P_1(1)$ nefiind nul, deducem că polinomul $P_1(x)$ nu este divizibil prin $(x-1)$. Rezultă dar, că $P(x)$ nu poate fi divizibil cu $(x-1)^3$, cum cere enunţul, nefiind divizibil nici cu $(x-1)^2$.

Au răspuns în acest fel, d-nii: *Băcicov B.* (Tighina), *Ghişoiu I. Petre* (Şc. Polit, Bucureşti) şi *Mihăileanu N.* (lic. Constanţa).

956. — *Să se determine n astfel ca limita expresiei,*

$$E = \frac{x - \sin x}{(1 - \cos x)^n},$$

pentru $x = 0$, *să fie finită şi diferită de zero şi să calculeze această limită.*

SUB-LT A. I. STAN

Pentru $x = 0$, expresiunea are forma nedeterminată $\frac{0}{0}$, putem deci aplica regula lui *Hôspital* şi avem:

$$E = \lim_{x=0} \frac{1 - \cos x}{n(1 - \cos x)^{n-1} \sin x} = \lim_{x=0} \frac{1}{n(1 - \cos x)^{n-1} \sin x}.$$

Cum,

$$1 - \cos x = 2\sin^2\frac{x}{2}, \qquad \sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2},$$

mai putem scri:

$$(1) \qquad E = \lim_{x=0} \frac{1}{2^{n-1} \cdot n \sin^{2n-3}\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}} =$$

$$\frac{1}{2^{n-1}n} \lim_{x=0} \frac{1}{\sin^{2n-3}\frac{x}{2}}.$$

Observăm că, pentru ca limita lui E să fie finită şi diferită de zero, trebuie ca,

$$2n - 3 = 0, \qquad \text{deci:} \qquad (2)\ n = \frac{3}{2},$$

căci în acest caz:

$$(3) \qquad \lim_{x=0} \frac{1}{\sin^{2n-3}\frac{x}{2}} = 1.$$

Expresiunea lui E din (1) devine, având în vedere relaţiile (2) şi (3):

$$E = \frac{2}{3 \cdot 2^{\frac{3}{2}-1}} = \frac{\sqrt{2}}{3}.$$

Soluţii date de d-nii: *Băcicov B.* (Tighina), *Băcicov Victor* (student, Iaşi), *Băleanu Nolică* (lic. Milit., Craiova) şi *Marşieu Teodor* (Şc. Polit., Timişoara).

Observare. S'a primit şi o soluţie neiscălită.

1023. — *Să se arate că dacă n este impar, expresiunea,*

$$1946^{3n-2} + 3^{6n+9} + 32^3 \times 729^n + 1,$$

se divide cu 59.

CEZAR IVANESCU

Observăm că avem:

$$(1) \quad 1946^{3n-2} = (33 \times 59 - 1)^{3n-2} = \text{mult. } 59 - 1,$$

fiindcă n este impar.

$$3^{6n+9} = 729^n \times 19683,$$

$$32^3 \times 729^n = 729^n \times 32768,$$

deci:

$$(2) \quad 3^{6n+9} + 32^3 \times 729^n = 729^n \times 52451 =$$

$$729^n \times (889 \times 59) = \text{mult. } 59.$$

Ţinând seamă de relaţiile (1) şi (2), putem scri:

$$1946^{3n-2} + 3^{6n+9} + 32^3 \times 729^n + 1 =$$

$$\text{mult. } 59 - 1 + \text{mult. } 59 + 1 = \text{mult. } 59.$$

Expresiunea dată este deci divizibilă cu 59.

Soluţii date de d-ra: *Roşca Şt. Veronica* şi ded-nii: *Acikgheozian A. N.*, *Boerescu P. George*, *Boisnard Jean* (lic. Spiru-Haret, Bucureşti), *Coandă I. Virgil* (lic. Milit., Craiova), *Dăscălescu Şt. Hristache* (stud, Bucureşti), *Margulius Marius* (lic. Spiru-Haret, Bucureşti), *Matei D. D-tru* (lic. Internat, Iaşi), *Mereuţă Emilian* (Bucureşti), *Motoc D. M.* (lic. Oltenita), *Negrea A. Leonte-Mircea* (student, Bucureşti), *Pănoiu Emanoil* (lic. Carol, Craiova), *Păslariu V. Vasile* (lic. Codreanu, Bârlad), *Păunescu N.* (lic. Milit., Craiova), *Popa Gh. Ioan* (Bucureşti), *Popa D. Traian* (lic. Giurgiu), *Popescu N. Petre* (Bucureşti), *Popescu C. Ştefan* (lic. Milit, Craiova), *Predoescu M. Traian* (lic. Milit., Craiova), *Serban Teodor*, *Stoica* (Sub-Lt), *Tica P. Marin* (Şc. Milit., de Artilerie) şi *Trică Ioan* (Constanţa).

1528. — *Să se stabilească că într'un triunghiu oarecare există următoarele identităţi:*

$$b^2 \sin 2C - c^2 \sin 2B = 2bc \sin (B - C)$$

$$a^2 = b^2 \cos 2C + c^2 \cos 2B + 2bc \cos (B - C)$$

$$a^2 \sin 2A + b^2 \sin 2B + c^2 \sin 2(B - A) =$$

$$2bc \sin (2B - A)$$

V. ALACI

1°. Ţinând seamă de relaţia: $b \sin C = c \sin B$, putem scri succesiv:

$$b^2 \sin 2C - c^2 \sin 2B = 2b \cos C \cdot c \sin B -$$

$$2c \cos B \cdot b \sin C = 2bc (\sin B \cos C - \cos B \sin C)$$

$$= 2bc \sin (B - C).$$

Astfel prima identitate este stabilită.

2°. Considerăm relaţiunile cunoscute într'un triunghiu,

$$a = b \cos C + c \cos B$$

$$0 = b \sin C - c \sin B,$$

ridicându-le la patrat şi scăzându-le, ne dau succesiv:

$$a^2 = b^2 \cos^2 C + 2bc \cos B \cos C + c^2 \cos^2 B -$$

$$b^2 \sin^2 C + 2bc \sin B \sin C - c^2 \sin^2 B$$

$$= b^2 (\cos^2 C - \sin^2 C) + c^2 (\cos^2 B - \sin^2 B) +$$

$$2bc (\cos B \cos C + \sin B \sin C)$$

$$= b^2 \cos 2C + c^2 \cos 2B + 2bc \cos (B - C).$$

Identitatea 2-a este astfel stabilită.

3°. Considerăm relaţiile cunoscute:

$$a \cos A = c \cos (B - A) - b \cos B$$

$$a \sin A = b \sin B - c \sin (B - A).$$

(„Culegere de Probleme" Trigonometrie, Cap. XVIII, p. 397.)

Multiplicând cu 2 produsul acestor relaţii, putem scri succesiv:

$$2a^2 \sin A \cos A = 2bc \sin B \cos (B - A) -$$
$$2b^2 \sin B \cos B - 2c^2 \sin (B - A) \cos (B - A) +$$
$$2bc \cos B \sin (B - A),$$

sau:

$$a^2 \sin 2A + b^2 \sin 2B + c^2 \sin 2(B - A) =$$
$$2bc[\sin B \cos (B - A) + \cos B \sin (B - A)] =$$
$$2bc \sin (2B - A).$$

Avem astfel stabilită identitatea 3-a.

Soluții date de d-nii: *Amăreșteanu F. Marcel* (student), *Cazanacli V. Petre*, *Popescu Zorica* și *Tilică C. Ștefan* (lic. T-Severin).

PROBLEME PROPUSE

1618 — Să se găsească un cub de șase cifre, astfel ca numărul format de una din grupele de două cifre consecutive, să fie egală cu suma celorlalte două grupe formate din cifre consecutive.

V. THÉBAULT

1619. — Avem:

$$41 + 80 + 320 = (-26) + 214 + 253$$
$$41 + 80 = 11^2$$
$$41 + 320 = 19^2$$
$$41^2 + 80^2 + 320^2 = (-26)^2 + 214^2 + 253^2.$$

Cum aflăm soluția generală a sistemului,

$$\begin{cases} a + b + c = (-x) + y + z \\ a + b = u^2 \\ a + c = w^2 \\ a^2 + b^2 + c^2 = (-x)^2 + y^2 + z^2 ? \end{cases}$$

A MOESNER

1620. — Dacă,

$$x + y + z = 0.$$

avem:

$$3x^2 + (y - z)^2 = 3y^2 + (z - x)^2 = 3z^2 + (x - y)^2$$

Caz particular:

$$x = \cos^2 \alpha, \qquad y = \sin^2 \alpha$$

N. N. MIHAILEANU

1621. — Să se rezolve sistemul diofantian:

$$\begin{cases} x^2 + axy + by^2 = u^3 \\ x^2 + cxz + dz^2 = v^2, \end{cases}$$

a, b, c și d fiind numere întregi date, pozitive sau negative.

A. GLODEN

1622. — Se dau două axe rectangulare pe care se iau respectiv punctele, M și N. Din N se duce un fascicol de drepte, iar din M fascicolul normal acestuia. Să se arate:

1°. Că punctele $R_0, R_1, \ldots, R_n$ de intesecție a celor două fascicole sunt conciclice.

2°. Să se arate că cercul ce conține aceste puncte trece și prin punctul O de intersecție a celor două axe.

MIHAIL BOTEZ

1593*) — Dacă rădăcinele ecuației

$$x^3 + px^2 + qx + r = 0$$

sunt toate reale, pozitive și supraunitare, avem:

$$-1 < \frac{p + q}{r} < 0;$$

iar dacă sunt pozitive și subunitare, avem:

$$-1 < p + q < 0.$$

L-T. C. IONESCU-ȚIU

1623 — Notațiile fiind cele obicinuite într'un triunghiu, să se stabilească identitățile:

$$\frac{2r(p - a)}{(r + p - a)^2} = \frac{a}{a + 2R} = \frac{2pr_a}{(p + r_a)^2}.$$

V. ALACI

1624 — Fie $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ trei vectori cu valorile numerice, A, B, C. Se întreabă ce relație trebuie să existe între cei trei vectori, pentru ca,

$$f(A, C) = 0,$$

să reprezinte o iperbolă echilateră.

PL. ANDRONESCU

*) Problema 1593 propusă în „R. M. T.", An. XVII, No. 4, se anulează, fiind propusă tot de autorul ei sub No. 1561, și se înlocuește cu prezenta.

ERATĂ În problema 1616 se va înlocui $a + b - c$, prin $a - b + c$.

Manuscrise primite de la corespondenții noștrii până la 10 a lunei curente și anume: Articole (A), Note (N), probleme propuse (P) și probleme rezolvate indicate prin numărul lor de ordine.

Anastasiu Mihail (1556, 1598); *Andrievici N.* (P., 1569, 1580, 1597, 1598, 1603); *Babeţiu T. Corneliu* (1574, 1579, 1580, 1583, 1585, 1598, 1599); *Berinde Titus* (N., P., 1595, 1597, 1598, 1599, 1601, 1604, 1611, 1617); *Buznea Dinu* (1562, 1572, 1611); *Cernat Camil* (1574); *Dăscălescu Hristache* (1575, 1581, 1591, 1592, 1597, 1598, 1603, 1606); *Deciulescu Gh.* (1611); *Florescu Victor* (1562, 1569, 1573, 1579, 1580, 1584, 1585, 1587, 1588, 1592, 1599, 1601, 1606, 1608); *Gloden A.* (N, P, 1592); *Jidanu C-tin* (1587, 1598, 1608, 1611); *Lupescu Corneliu* (1569, 1570, 1571, 1572, 1573, 1574, 1576, 1579); *Matei D. D-tru* (1002, 1454, 1483, 1495, 1496, 1514, 1547, 1553, 1556, 1562, 1569, 1581, 1590, 1592, 1597, 1598 1599 1602, 1603, 1606, 1608); *Petrescu C. Alin* (P., 1584, 1585, 1592, 1603, 1608); *Petrescu P. Benone* (1549, 1568, 1574, 1579, 1584, 1585, 1592, 1597, 1601, 1603); *Rădulescu Octavian* (P., 1562, 1567, 1569, 1573, 1574, 1579, 1580, 1584, 1587, 1588, 1590, 1591, 1592, 1593, 1596, 1597, 1598, 1601, 1603, 1604, 1606, 1607, 1608); *Roth I. Alexandru* (1567, 1597, 1599, 1611); *Rosenblatt S. Millu* (1579, 1601, 1603, 1606, 1608); *Segal Zigu* (1585, 1590, 1591, 1592, 1609, 1611, 1614, 1616, 1617); *Staicu I. N.* (1598); *Stamate I. Ionel* (P., 1599); *Stefănescu Costin* (P., 1580, 1582, 1599, 601, 1608); *Stefănescu D. Nicolae* (1371, 1451, 1488, 1496, 1515, 1548, 1560, 1574, 1575); *Stoenescu D. Mircel* (1550 1556, 1598, 1599, 1611); *Tilică C. Ştefan* (P., 1574, 1580, 1611, 1614, 1616, 1617); *Zamfirescu Gh. I.* (P.)

INFORMAŢIUNI

La Redacţiunea „Revistei Matematice din Timişoara" se primesc abonamente pentru:

BOLETIN MATEMATICO

ANUL AL X-LEA

care a început în Martie 1937.

Costul *special* a unui abonament este de 200 lei.

Această Revistă se publică în Buenos-Aires, Republica Argentina.

Pentru anul al X-lea care a începe în Martie 1937, s'au primit până acum la Redacţia „R. M. T." următoarele abonamente:

1. Locotenent *Costăchescu Constantin,* Distrugătorul *„Regina Maria"*, Constanţa.
2. Profesor *I. Nemeţ,* Casa învăţătorilor, str. Remus, Timişoara.
3. *Teofil Vescan,* Calea Regele Ferdinand No. 110, Cluj.
4. Profesor *Spiridon Ghiţescu,* liceul de băieţi din Mizil.
5. Student *Nichita Bododea,* Bulevardul Al I. Cuza No. 27, Bucureşti.
6. Prof. *Sergescu P.,* Universitatea, Cluj.

Răspundem pe această cale, la toţi acei corespondenţii, care se plâng că anumite probleme nu le-au fost considerate, că aceasta se datoreşte sau faptului că acele soluţiuni au sosit întârziate, sau au fost greşite, sau n'au sosit de loc.

Evident că astfel de probleme nu pot fi luate, în seamă.

Fiecare problemă rezolvată trebuie să fie scrisă aparte şi să nu se continue cu alte probleme, căci nu se pot repartiza la numerile corespunzătoare, deci nu pot fi luate în seamă.

SPHINX

Revue mensuelle des questions récréatives

FONDÉE EN 1931

REVUE UNIQUE DANS SON GENRE
dans le monde entier

ABONNEMENTS:
1 an: Belgique, **30 fr.** France, **25 fr.**
Etranger, 7 **belgas**

Administration:
SPHINX, Bruxelles 173, Avenue Longchamp

Toţi cei ce ne trimet articole, note, probleme propuse sau rezolvate, pentru a fi luate în consideraţie, sunt obligaţi a fi abonaţi la Revista Matematică din Timişoara.

Anunţăm că nu vom mai lua în considerare problemele rezolvate, iscălite de mai mulţi corespondenţi. Fiecare corespondent trebue să-şi redacteze problema rezolvată de el, şi s'o iscălească.

Legându-se colecţia R. M. T., anul XV, în volum şi rămânând numere răzleţe care nu au putut fi legate, putem trimete corespondenţilor noştri numere care eventual le lipsesc din colecţie în schimbul sumei de 10 lei. Doritorii se vor adresa administraţiei revistei, trimiţând suma prin mandat poştal.

ANUL XVII. 15 NOEMVRIE 1937 No. 9.

REVISTA MATEMATICĂ

DIN

TIMIȘOARA

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA APARE ODATA PE LUNA.

PREȚUL UNUI NUMĂR 12 LEI PREȚUL ABONAMENTULUI 100 LEI PE AN.

CUPRINSUL

1 A. GLODEN. SUR QUELQUES ÉQUATIONS INDÉTERMINÉES.

2. NOTE MATEMATICE: 19, 20.

3. BIBLIOGRAFIE.

4. INSTIINTARE.

5. PROBLEME REZOLVATE: 847, 1037, 1046, 1113, 1141, 1549, 1550.

6. PROBLEME PROPUSE: 1625-1632.

7. INFORMATIUNI

TIMISOARA

Institut de Arte grafice Tipografia Românească

„Orice profesor de matematici, din orice colţ al ţării şi de la orice şcoală, trebuie să fie apostol al specialităţii sale. Din felul cald şi luminos cum îşi face lecţiile, din drumul drept şi demn pe care îl urmează în viaţă, trebuie să apară limpede că judecata matematică precisă şi sigură, curată ca cristalul, are o înaltă şi admirabilă valoare educativă pentru viaţă.

Adevărul curat, adevărul drept, adevărul luminos, să fie îndreptarul vieţei noastre. Aceasta să fie contribuţia specialităţii noastre la îndrumarea neamului românesc, pe calea care-i stă deschisă".

G. ŢIŢEICA

Avem plăcerea a anunţa că începând de la 15 Noemvrie 1937, mai face parte dintre membrii „Revistei Matematice din Timişoara" şi d-l profesor *A. Gloden,* unul din cei mai apreciaţi şi mai distinşi corespondenţi, cu o bogată activitate la revista noastră. Adresa: Rue Jean Jaurès 11, Luxembourg.

Avem plăcerea a anunţa că începând de la 15 Noemvrie 1937, mai face parte dintre membrii „Revistei Matematice din Timişoara" şi d-l Locot. *Almăjan P. Petre,* licenţiat în matematici, fost corespondent, str. Zaharia 23, Bucureşti.

Manuscrisele destinate Revistei Matematice din Timişoara conţinând soluţiunile problemelor propuse şi probleme, note sau articole originale vor fi trimise pe adresa: **V. Alaci,** profesor Şcoala Politechnică, Timişoara.

Plata abonamentului precum şi reclamaţiunile de neprimirea Revistei vor fi adresate d-lui **Prof. C. Teodorescu,** Rectorul Şcoalei Politechnice din Timişoara.

Plata abonamentului se face prin CEC (Casa de economii şi cecuri postale) unde revista are contul CEC No. 85208, sau prin mandat postal adresat d-lui Prof. C. TEODORESCU, Rectorul Şcoalei Politechnice din Timişoara.

Taxa de Membru în „Comitetul de Conducere al Revistei Matematice din Timişoara" este pentru anul XVII, de 200 (două sute) lei.

Colecţia R. M. T., se găseşte la Administraţia Revistei, şi se poate procura în schimbul preţului:

Anul I, epuizat. Anii: II—XVI inclusiv, broşate, 120 lei fiecare.

ANUL XVII — NO. 9 TIMISOARA, 15 NOEMVRIE 1937

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA

APARE LA 15 A FIECAREI LUNI

PREȚUL UNUI NUMAR . . . . . 12 LEI
ABONAMENT ANUAL . . . . . 100 LEI
Abonamentele sunt socotite totdeauna dela 15 Martie

REDACȚIA: Prof. V. ALACI
Școala Politechnică din Timișoara.
ADMINISTRAȚIA: Prof. C. TEODORESCU
Rectorul Școalei Politechnice din Timișoara.

SUR QUELQUES ÉQUATIONS INDÉTERMINEÉS

PAR

A. GLODEN
(Luxenbourg)

1. Résolution en nombre entiers de l'équation

$$x^2 + y^2 = z^2 + 1.$$

De l'identité connue

$$(mq-np)^2+(mp+nq)^2=(mq+np)^2+(mp-nq)^2,$$

on déduit, en égalant le terme $mq - np$ à 1,

$$1^2+\left[mp+\frac{n(1+np)}{m}\right]^2=$$

$$\left[mp-n\frac{(1+np)}{m}\right]^2+(1+2np)^2.$$

En posant $n = km$, on trouve

$$1^2+[mp+k(1+kmp)]^2=$$

$$[mp-k(1+kmp)]^2+(1+2kmp)^2.$$

On peut aussi poser $1+np=lm$, ou $1+np\equiv 0$ mod. m.

Soit p' une valeur vérifiant cette congruence pour des valeurs données de m et de n; on aura $p = p' + rm$.

On a des formules très simples en posant

$$m = 1 + np, \quad \text{ou} \quad m = 1.$$

a. $m = 1 + np$; $\quad 1^2+(p+np^2+n)^2=$

$$(p+np^3-n)^2+(1+2np)^2,$$

b. $m = 1$; $\quad 1^2+(p+n+n^2p)^2=$

$$(p-n-n^2p)^2+(1+2np)^2.$$

Si dans l'identité b. on remplace n par p et vice versa, ou trouve a.

Exemples numériques.

$k=2,\ m=1,\ p=1,\quad 1^2+7^2=5^2+5^2.$

Résolvons la congruence $1+np\equiv 0$ mod. m, pour $n=2,\ m=3$

$$1+2p\equiv 0 \pmod 3, \quad \text{pour } p=1+3r.$$

$p=4,\quad 1+18^2=6^2+17^2,$

$p=7,\quad 1+31^2=11^2+29^2,$

$p=10,\quad 1+44^2=16^2+41^2,$

$p=13,\quad 1+57^2=21^2+53^2,$

$p=16,\quad 1+70^2=26^2+65^2,$

$p=19,\quad 1+83^2=31^2+77^2,$

a. $n=3,\ p=2,\quad 1+17^2=11^2+13^2,$

b. $n=3,\ p=2,\quad 1+23^2=19^2+13^2,$

2°. Résolution en nombres entiers de l'équation

$$x^4 + y^2 = z^2 + 1.$$

Si dans l'identité b. ou pose $p = 1 + \frac{n}{2}$, on a

$$(n+1)^4+\left(\frac{n^3}{2}+n^2+\frac{n}{2}-1\right)^2=$$

$$\left(\frac{n^3}{2}+n^2+3\frac{n}{2}+1\right)^2+1.$$

Exemples:

$n=3,\quad 4^4+23^2=28^2+1,$

$n=4,\quad 5^4+49^2=55^2+1,$ ou $5^4+7^4=55^2+1^2,$

$n=5,\quad 6^4+89^2=96^2+1,$

$n=6,\quad 7^4+146^2=154^2+1,$

$n=7,\quad 8^4+223^2=232^2+1.$

On peut aussi, en se basant sur l'identité b. poser $1+2np=t^2$, t étant un nombre impair et prendre pour n un diviseur quelconque de $\frac{t^2-1}{2}$.

Exemples:

$1+2np=3^2$, $n=2, p=2$, $3^4+8^2=12^2+1$,
$n=4, p=1$, $3^4+19^2=21^2+1$,
$1+2np=5^2$, $n=2, p=6$, $5^4+20^2=32^2+1$,
$n=3, p=4$, $5^4+35^2=43^2+1$,
$n=4, p=3$, $5^4+49^2=55^2+1$,
$n=6, p=2$, $5^4+76^2=80^2+1$,
$n=12, p=1$, $5^4+155^2=157^2+1$,
$1+2np=7^2$, $n=2, p=12$, $7^4+38^2=62^2+1$,
$n=3, p=8$, $7^4+67^2=83^2+1$,
$n=4, p=6$, $7^4+94^2=106^2+1$,
$n=6, p=4$, $7^4+146^2=154^2+1$,
$n=8, p=3$, $7^4+197^2=203^2+1$,
$n=12, p=2$, $7^4+298^2=302^2+1$,
$n=24, p=1$, $7^4+599^2=601^2+1$,
$1+2np=9^2$, $n=2, p=20$, $9^4+62^2=102^2+1$,
$n=4, p=10$, $9^4+154^2=174^2+1$,
$n=5, p=8$, $9^4+197^2=213^2+1$,
$n=8, p=5$, $9^4+323^2=333^2+1$,
$n=10, p=4$, $9^4+406^2=414^2+1$,
$n=20, p=2$, $9^4+818^2=822^2+1$,
$n=40, p=1$, $9^4+1639^2=1641^2+1$.

Il est évident qu'on peut obtenir, par ce dernier procédé, des solutions en nombres entiers pour le terme $1+2np$, et, en nombres rationneles pour les deux autres termes littéraux.

Exemple.

$$1+2np=3^2,\ n=3,\ p=\frac{4}{3},\ 3^4+\left(\frac{41}{3}\right)^2=\left(\frac{49}{3}\right)^2+1,$$

$$n=\frac{4}{3},\ p=3,\ 3^4+\left(\frac{11}{3}\right)^2=\left(\frac{29}{3}\right)^2+1.$$

3^0. $x^2+y^2=z^2+t^2+1$.

Partons de l'identité

$$(p^2-mm'-nn')^2+[p(m+m')]^2+[p(n+n')]^2=$$
$$(p^2+mm'+nn')^2+[p(m-m')]^2+[p(n-n')]^2.$$

En posant $n'=-n$, et $p=1$ avec $m-m'=1$, ou trouve

$$(1-m^2+m+n^2)^2+(2m-1)^2=$$
$$(1+m^2-m-n^2)^2+(2n)^2+1.$$

Exemple: $m=3,\ n=1$; $4^2+5^2=6^2+2^2+1$.

Pour résoudre $x^2+1=y^2+z^2+t^2$, on trouve

$$(1-m+m^2+n^2)^2+1=$$
$$(1+m-m^2-n^2)^2+(2m-1)^2+(2n)^2.$$

Exemple: $m=3,\ n=1$; $8^2+1=6^2+5^2+2^2$.

4^0. Pour trouver des solutions entières de l'équation $x^2+2=y^2+z^2+t^2$, on peut se servir de l'identité:

$$(1+m^2-m+n^2-n)^2+2=$$
$$(1-m^2+m-n^2+n)^2+(2m-1)^2+(2n-1)^2.$$

Exemple: $m=3,\ n=2$; $9^2+2=7^2+5^2+3^2$.

NOTE MATEMATICE

19. — *Relaţiunea între problemele 99 şi 1499.*

La pag. 57, Vol. XVI am dat soluţia problemei 99 în care se cerea să se găsească volumul unui corp străin aşezat în interiorul clopotului unei maşini pneumatice în cazul unor anumite date numerice între care şi aceia că volumul interior al clopotului este de 2 litri. S-a ajuns la rezolvarea ecuaţiei

$$(1)\qquad 7{,}6(2-x)^2=1{,}9(6-x)^2,$$

care are o rădăcină negativă, egală cu -2 şi o rădăcină pozitivă mai mare ca volumul interior al clopotului, deci inadmisibilă.

Problema 99 are deci, din punct de vedere practic, condiţiuni imposibile. Trebue ca datele numerice să fie aşa în cât cel puţin una din rădăcinele unei ecuaţii de forma (1) să fie cuprinsă între 0 şi 2. Am ales ca arbitrară presiunea p după două lovituri de piston şi am cerut prin problema 1499 să se determine p aşa în cât una din soluţiile ecuaţiei

$$(2)\qquad 76(2-x)^2=p(6-x)^2$$

să fie cuprinsă între 0 şi 2. In soluţia dată problemei 1499 la pag. 10, Vol. XVII s-a găsit

$$0<p<\frac{76}{9}.$$

Deci dacă se înlocueşte în enunţul problemei 99 data numerică 19 prin un număr dat de limitele lui p din problema 1499 se ajunge la rezultate

numerice acceptabile. Din punct de vedere practic, valoarea lui p va trebui aleasă în concordanţă cu celelalte date ale problemei 1499.

Voi reveni cu alt exemplu asupra atenţiei de dat enunţurilor problemelor de aplicaţiuni practice.

G-L Gh. Buicliu

20. — *Triangle bordé de triangles équilatéraux.*

Soient A_1, B_1, C_1 les sommets des triangles équilatéraux construits extérieurement sur les côtés $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$ d'un triangle ABC, d'aire S. Les droites AA_1, BB_1, CC_1 concourent en un point V_1 et chacune de ces droites bissecte les angles BV_1C, CV_1A, AV_1B; de sorte que les angles $B_1V_1C_1$, $C_1V_1A_1$, $A_1V_1B_1$ sont égaux à 120°, et si l'on pose $AV_1 = x$, $BV_1 = y$, $CV_1 = z$, on a

$$V_1A_1 = y + z = \alpha, \qquad V_1B_1 = z + x = \beta,$$
$$V_1C_1 = x + y = \gamma.$$

1. Si $B_1C_1 = a_1$, $C_1A_1 = b_1$, $A_1B_1 = c_1$, il résulte de ces remarques que l'on a

$$(1) \qquad \begin{aligned} a^2 &= y^2 + z^2 + yz \\ b^2 &= z^2 + x^2 + zx \\ c^2 &= x^2 + y^2 + xy, \end{aligned}$$

et, par analogie,

$$\begin{aligned} a_1^2 &= \beta^2 + \gamma^2 + \beta\gamma \\ b_1^2 &= \gamma^2 + \alpha^2 + \gamma\alpha \\ c_1^2 &= \alpha^2 + \beta^2 + \alpha\beta. \end{aligned}$$

En retranchant membre à membre l'une de l'autre les deux premières équations de ces deux systèmes, on obtient

$$b^2 - a^2 = x^2 - y^2 + zx - zy = (x - y)(x + y + z)$$

et

$$b_1^2 - a_1^2 = \alpha^2 - \beta^2 + \alpha\gamma - \beta\gamma =$$
$$(\alpha - \beta)(\alpha + \beta + \gamma) = (y - x) \cdot 2(x + y + z);$$

de sorte que

$$b_1^2 - a_1^2 = 2(a^2 - b^2),$$

et, symétriquement,

$$c_1^2 - a_1^2 = 2(a^2 - c^2).$$

Pour trouver une troisième équation entre a, b, c et a_1, b_1, c_1, remarquons d'abord que

$$a_1^2 = 3x^2 + y^2 + z^2 + 3zx + 3xy + yz.$$

A cause de la symétrie, on a de suite

$$a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 = 5(x^2 + y^2 + z^2) + 7(yz + zx + xy),$$

et, comme

$$a^2 + b^2 + c^2 = 2(x^2 + y^2 + z^2) + yz + zx + xy,$$

$$2(a_1^2 + b_1^2 + c_1^2) = 5(a^2 + b^2 + c^2) + 9(yz + zx + xy).$$

Mais, il est facile de vérifier l'identité

$$3(yz + zx + xy)^2 =$$
$$2\Sigma(x^2 + y^2 + xy)(z^2 + x^2 + zx) - \Sigma(x^2 + y^2 + z^2)^2,$$

c'est-à-dire que l'on a

$$3(yz + zx + xy)^2 =$$
$$2b^2c^2 + 2c^2a^2 + 2a^2b^2 - a^4 - b^4 - c^4 = 16S^2.$$

Dès lors, il vient

$$(2) \qquad 2(a_1^2 + b_1^2 + c_1^2) = 5(a^2 + b^2 + c^2) + \frac{4S\sqrt{3}}{3};$$

de sorte que

$$a_1^2 = \frac{1}{2}(3b^2 + 3c^2 - a^2 + 4S\sqrt{3})$$

$$(3) \qquad b_1^2 = \frac{1}{2}(3c^2 + 3a^2 - b^2 + 4S\sqrt{3})$$

$$c_1^2 = \frac{1}{2}(3a^2 + 3b^2 - c^2 + 4S\sqrt{3}).$$

2. La considération des triangles équilatéraux BCA_2, CAB_2, ABC_2 construits intérieurement sur les côtés du triangle ABC conduit à des résultats analogues. Les relations (2) et (3) deviennent

$$(4) \qquad 2(a_2^2 + b_2^2 + c_2^2) = 5(a^2 + b^2 + c^2) - \frac{4S\sqrt{3}}{3},$$

et

$$a_2^2 = \frac{1}{2}(3b^2 + 3c^2 - a^2 - 4S\sqrt{3})$$

$$(5) \qquad b_2^2 = \frac{1}{2}(3c^2 + 3a^2 - b^2 - 4S\sqrt{3})$$

$$c_2^2 = \frac{1}{2}(3a^2 + 3b^2 - c^2 - 4S\sqrt{3}).$$

N. B. Des relations (3) et (5) on déduit que

$$\Sigma(a_1^2 + a_2^2) = 5(a^2 + b^2 + c^2).$$

V Thébault
(Le Mans, France)

BIBLIOGRAFIE

1. *Gazeta Matematică*, anul XLIII, No. 2, Octomvrie 1937. Consideraţii invariant-teoretice asupra patrulaterului, de *D. Barbelian*. Aritmetica lui *Gheorghe Asachi*, de *Petre V. Cazanacli*. O configuraţie de cercuri, de *Ad. Gheorghiu*. Raportul comisiunei pentru acordarea premiului „*General Şc. Panaitescu*" pe anul 1936—1937, de Ing. *D. Stoica*, Ing. *Al. Bunescu*, Col. *Gh. Liteanu*. Note matematice. Bibliografie. Cereri. Diverse. Probleme rezolvate. Exerciţii. Probleme propuse.

2. *Ştiinţă şi Progres*. Revista ştiinţifică a liceelor militare, anul IV, No. 5, Octomvrie 1937. Soluţiile chestiunilor propuse la lucrările scrise dela examinele de capacitate pentru profesorii secundari de matematici, ţinute la Iaşi şi Cluj în Maiu 1937, de *Teofil Vescan*. *Guglielmo Marconi*, de *Traian Codreanu*. Noutăţi: Congresul interbalcanic al matematicienilor. Huţulii, de Căpitan *Ionescu Alexandru*. Probleme rezolvate şi propuse.

3. *Gazeta Matematică*. Supliment cu Exerciţii, anul IV, No. 1, Noemvrie 1937.

4. *Boletin Matematico*, anul X, N-rile 3 şi 4, Septemvrie 1937, Buenos Aires. *Darmois*, *Levi-Civita-Terradas*. Asupra triunghiurilor Pitagorice, de *Rodrigo Noguera*. Parantenteze de ordin superior, de *B. I. Baidaff*. Informaţii bibliografice. Note. Probleme rezolvate. Probleme propuse.

5. *Buletinul Şedinţelor*. Societatea Română de Ştiinţe. Anul II, No. 1. Darea de seamă a Adunării Generale şi alegerea Comitetului pe anul 1937. Comitetele Secţiunilor. Activitatea Secţiunilor de: Matematici, Fizică, Chimie. Stiinţe Naturale. Infiinţarea Secţiunii de Ştiinţe Agricole.

6. *Pitagora*, Anul III, No. 1, Octomvrie 1937. Rezultatul concursului revistei „Pitagora" pe anul 1936—1937. Despre sumarea puterilor asemenea ale primelor *n* numere consecutive, de *V. Postolache*. Două probleme de bacalaureat. Probleme rezolvate şi propuse. Concursul Revistei „Pitagora" pentru anul 1937—1938.

7. *Chestiuni de Examen*, propuse la secţia matematică a facultăţii de Ştiinţe din Cluj. Fascicolă scrisă de d-l *Radu Ştefan*, student.

8. *Probleme de Capacitate din 1937*, redactate de *Teofil Vescan*. Supliment la volumul de „Exerciţii şi Probleme" a d-lui Prof. *Th. Angheluţă*.

9. *L. Toscano*. Sullo scarto dalla permutabilita nella teoria degli operatori lineari. (Estratto dal vol. XXV, Rendiconti della R. Accademia Nazionale dei Lincei.)

10. *L. Toscano*. L'equazione secolare a matrice circolante. (Estratto dal Vol. XXV, Rendiconti della R. Accademia Nazionale dei Lincei)

11. *J. Gonzalez Perera*. Concepto de Angulo.

12. *N. Abramescu*. Lecţiuni de Geometrie Analitică, urmate de întroducere elementară în studiul analitic al geometriilor neeuclidiene şi noţiuni elementare de geometrie vectorială. (Ediţia 2-a). Pentru a evidenţia importanţa acestui interesant volum de 655 pagini, pe care îl recomandăm călduros studenţilor de la matematici şi celor de la şcolile Politechnice, extragem din prefaţa scrisă de d-l Prof. *Gh. Ţiţeica*, următoarele rânduri: „*... impresia care se desprinde din cuprinsul tratatului d-lui Abramescu: un nemărginit entuziasm pentru matematică. E dorinţa de a cunoaşte cât mai multe proprietăţi, de a şti şi de a înţelege acea lume abstractă, frumos ordonată, cu proprietăţi admirabile. E un nepotolit neastâmpăr de a întinde orizontul dincolo de ceeace a cuprins mintea omenească până astăzi. E nesfârşita dragoste de ştiinţă, care a mânat în trecut şi va însufleţi şi în viitor atâţi oameni de ştiinţă.*

Acest entuziasm, pe care d-l Abramescu l-a turnat în volumul d-sale de Geometrie Analitică, îl cunosc de mult. Am cunoscut entuziasmul elevului de liceu, corespondent la Gazeta Matematică, al studentului şi al profesorului de liceu. Rar exemplu, mai ales la noi, de stăruinţă şi de dragoste neclintită de ştiinţă. Ba e ceva mai mult. E un exemplu de voinţă titanică şi mai rară, care merită să fie cunoscut, ca să servească de pildă".

13. *Théophile Vescan*. Considérations sur le problème de deux corps dans le cas des masses variables. (Extrait du „Bulletin Scientifique de l'École Polytechnique de Timişoara", t 7; f. 1—2)

14. *G. G. Constantinescu*. Sur la flexion des pièces droites. (Extrait du „Bulletin de Mathématiques et de Physique pure et appliquées, de l'École Polytechnique *Roi Carol II*, Bucarest.)

INSTIINŢARE.

I. La Revista Matematică din Timişoara s'a creiat un fond din al cărui venit anual să se acorde, drept premiu, un abonament la „Revistă" unui elev al Liceului „Ion Maiorescu" din Giurgiu; premiul va purta un nume, ce se va schimba dela an la an, aşa cum se arată în tabloul de mai jos:

In anul:	*Premiul va purta numele:*
1938 †	*Vasile EPURESCU, distins om politic, născut în Giurgiu, fost elev al liceului.*
1939 †	*Traian LALESCU, profesor universitar de matematici, întemeietor al Şcoalei Politehnice din Timişoara şi primul ei rector, fost profesor al liceului.*
1940 †	*Vasile NICULESCU, harnic institutor în Giurgiu, născut în Giurgiu, fost elev al liceului.*

Pentru anii viitori se va indica numele ce va purta premiul. In fiecare an, în luna Martie, va apărea în Revistă următoarea:

INSTIINŢARE.

„Domnul ..... Directorul liceului „Ion Maiorescu" din Giurgiu în unire cu preotul ..... profesor de religie, cu D-nii ..... şi ..... profesori de matematici şi cu D-l ..... dirigintele clasei, a desemnat pe elevul ..... din clasa ..... pentru a primi drept premiu pe anul ..... abonamentul la Revista Matematică din Timişoara.

BIBLIOTECA ASTRA SIBIU

Pentru acest an premiul poartă numele lui (Domnului) ..... Direcţiunea liceului este rugată a găsi prilejul pentru a spune cât ştie şi ce trebuie despre cel ce se reaminteşte şi pentru a da de exemplu elevilor pe colegul ce s'a distins".

Direcţiunea liceului „Ion Maiorescu" din Giurgiu, va aduce la cunoştinţa Revistei, datele necesare pentru complectarea înştiinţării, cel mai târziu până la finele lunii Februarie, în fiecare an (sau până la finele lunii Iunie, dacă fondul a ajuns la Soc. „G — M".) Elevul ce se premiază se alege de cei din înştiinţare şi trebue să fie născut în judeţul Vlaşca, din părinţi români de baştină, să aibă purtări frumoase, din observaţiuni să promită a ajunge de caracter, de preferinţă sărac dar nu neapărat, cu dragoste pentru matematici dar nu neapărat cel mai bun la acest studiu şi pe timpul cât primeşte abonamentul drept premiu să rămână neapărat elev al liceului. Dacă în unii ani Direcţiunea nu a putut desemna un elev meritos, atunci face cunoscut aceasta — pentru a deveni abonamentul de drept Bibliotecii Liceului.

II. Donatorii fondului: Miron V. NICULESCU, doctor în matematici, profesor la Universitatea din Cernăuţi şi Alexandru V. NICULESCU, profesor de matematici la Liceul „Mihail Eminescu" din Bucureşti, ambii născuţi în Giurgiu, declară că vor veghia pentru trăinicia fondului şi pentru a asigura venitul necesar premiilor în orice eventualitate, iar la timpul necesar va mări fondul atât cât va trebui ca premiile să fie sigure şi mai târziu.

PROBLEME REZOLVATE

847. — *Să se stabilească identitatea:*

$$\prod_{k=0}^{n-1} \sin\frac{(3k+1)\pi}{6n} \sin\frac{(3k+2)\pi}{6n} = \frac{\sqrt{3}}{4^n}.$$

V. ALACI

Soluţia d-lui *N. Mihăileanu.* In „R. M. T." Anul VII, No. 9, pag. 140, se arată că:

$$\cos nt = 2^{n-1} \prod_{k=0}^{n-1} \left[\cos t - \cos\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right].$$

Luând aci, $t = \frac{\pi}{6n}$, putem scri:

$$\cos\frac{\pi}{6} = 2^{n-1} \prod_{k=0}^{n-1} 2 \sin\frac{(3k+1)\pi}{6n} \sin\frac{(3k+2)\pi}{6n}$$

sau,

$$\prod_{k=1}^{n-1} \sin\frac{(3k+1)\pi}{6n} \sin\frac{(3k+2)\pi}{6n} = \frac{\cos\frac{\pi}{6}}{2^{n-1}.2^n} = \frac{\sqrt{3}}{4^n},$$

adică identitatea ce aveam de stabilit.

Soluţia d-lui *Marsieu Teodor.* Considerăm ecuaţiunea:

$$x^{2n} + 1 = 0, \tag{1}$$

care admite rădăcinele:

$$x = \cos\frac{(2k+1)\pi}{2n} + i\sin\frac{(2k+1)\pi}{2n} = \alpha_k, \tag{1'}$$

$$(k = 0, 1, 2, \ldots, 2n-1).$$

Ecuaţia (1) este însă o ecuaţie reciprocă, căci se mai poate scri:

$$x^n + \frac{1}{x^n} = 0, \tag{2}$$

deci dacă α_k $(k = 0, 1, 2, \ldots n-1)$, sunt n din rădăcinele sale, atunci $\frac{1}{\alpha_k}$ sunt celelalte n rădăcini.

Primul membru al ecuaţiei (2) se descompune astfel:

$$x^n + \frac{1}{x^n} = \frac{1}{x^n} \prod_{k=0}^{n-1} \left[(x-\alpha_k)\left(x - \frac{1}{\alpha_k}\right)\right] =$$

$$\frac{1}{x^n} \prod_{k=0}^{n-1} \left[x^2 - 1 - \left(\alpha_k + \frac{1}{\alpha_k}\right)x\right]. \tag{3}$$

Mai putem scri:

$$x^n + \frac{1}{x^n} = \prod_{k=0}^{n-1} \left[\left(x + \frac{1}{x}\right) - \left(\alpha_k + \frac{1}{\alpha_k}\right)\right]. \tag{4}$$

Insemnând acum, $x = e^{i\theta}$, $(i = \sqrt{-1})$, rezultă conform formulelor lui *Euler,*

$$x + \frac{1}{x} = e^{i\theta} + e^{-i\theta} = 2\cos\theta,$$

$$x^n + \frac{1}{x^n} = e^{ni\theta} + e^{-ni\theta} = 2\cos n\theta,$$

iar pe de altă parte privind relația (1'), deducem:

$$\alpha + \frac{1}{\alpha_k} = e^{i\frac{(2k+1)\pi}{2n}} + e^{-i\frac{(2k+1)\pi}{2n}} = 2\cos\frac{(2k+1)\pi}{n}.$$

Ținând seamă de aceste din urmă trei formule, relația (4) devine:

$$(5)\quad 2\cos n\theta = 2^n \prod_{k=0}^{n-1}\left[\cos\theta - \cos\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right].$$

Dacă luăm acum în (5), $\theta = \frac{\pi}{6n}$, avem:

$$2\cos\frac{\pi}{6} = \sqrt{3} = 2^n \prod_{k=0}^{n-1}\left[\cos\frac{\pi}{6n} - \cos\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right]$$

$$= 2^{2n} \prod_{k=0}^{n-1} \sin\frac{(3k+1)\pi}{6n}\sin\frac{(3k+2)\pi}{6n}.$$

De aci deducem,

$$\prod_{k=0}^{n-1} \sin\frac{(3k+1)\pi}{6n}\sin\frac{(3k+2)\pi}{6n} = \frac{\sqrt{3}}{4^n},$$

care este identitatea cerută.

1037. — *Să se stabilească identitatea:*

$$\frac{\sin(3\alpha_1+\alpha)+2\sin(2\alpha_1+2\alpha)+\sin(\alpha_1+3\alpha)}{\sum_{\lambda=0}^{4} C_4^\lambda \sin[(4-\lambda)\alpha_1+\alpha]} = \frac{1}{4\cos^2\frac{\alpha-\alpha_1}{2}}$$

V. ALACI

Insemnăm cu N și N_1 respectiv, numărătorul și numitorul fracției din primul membru și facem unele transformări ușor de urmărit, astfel că putem scri succesiv:

$$(1)\quad N = \sin(3\alpha_1+\alpha)+2\sin(2\alpha_1+2\alpha)+\sin(\alpha_1+3\alpha) =$$

$$2\sin(2\alpha_1+2\alpha)\cos(\alpha_1-\alpha)+2\sin(2\alpha_1+2\alpha) =$$

$$2\sin(2\alpha_1+2\alpha)[1+\cos(\alpha_1-\alpha)] =$$

$$4\sin(2\alpha_1+2\alpha)\cos^2\frac{\alpha_1-\alpha}{2},$$

$$(2)\quad N_1 = \sum_{\lambda=0}^{4} C_4^\lambda \sin[(4-\lambda)\alpha_1+\alpha] = \sin 4\alpha_1 +$$

$$4\sin(3\alpha_1+\alpha)+6\sin(2\alpha_1+2\alpha)+4\sin(\alpha_1+3\alpha)+$$

$$\sin 4\alpha = 2\sin(2\alpha_1+2\alpha)\cos(2\alpha_1-2\alpha)+$$

$$8\sin(2\alpha_1+2\alpha)\cos(\alpha_1-\alpha)+6\sin(2\alpha_1-2\alpha) =$$

$$2\sin(2\alpha_1+2\alpha)[\cos(2\alpha_1-2\alpha)+4\cos(\alpha-\alpha)+3] =$$

$$2\sin(2\alpha_1+2\alpha)\left[2\cos^2(\alpha_1-\alpha)\ 1+8\cos^2\frac{\alpha_1-\alpha}{2}-4+3\right] =$$

$$4\sin(2\alpha_1+2\alpha)\left[\cos^2(\alpha_1-\alpha)+4\cos^2\frac{\alpha_1-\alpha}{2}-1\right] =$$

$$4\sin(2\alpha_1+2\alpha)\left[\left(2\cos^2\frac{\alpha_1-\alpha}{2}-1\right)^2+\right.$$

$$\left.4\cos^2\frac{\alpha_1-\alpha}{2}-1\right] = 16\sin(2\alpha_1+2\alpha)\cos^4\frac{\alpha_1-\alpha}{2}.$$

Impărțind acum relațiile (1), obținem după simplificare:

$$\frac{N}{N_1} = \frac{1}{4\cos^2\frac{\alpha_1-\alpha}{2}},$$

care este tocmai identitatea cerută.

Soluție dată de d-ra: *Virag Veronica* (studentă, Cluj) și de d-nii: *Acikgheozian Nubar, Coandă I. Virgil* (lic. Milit., Craiova), *Cojocaru M. Marin* (lic. Milit., Craiova), *Dăscălescu Hristache* (student, București), *Ivănescu Cezar* (lic. Bârlad), *Lupescu Gh. Corneliu* (lic. Roman), *Margulius Marius* (lic. Spiru-Haret), *Negrea A. Leonte-Mircea* (student, București), *Predoiu Fl.* (Șc. Navală), *Savovici Florentin* (lic. Milit., Tg-Mureș), *Șerban Teodor* și *Tica Petre Marin* (Șc. Milit. de Artilerie).

Altă soluție. Problema propusă este un caz particular al identității:

$$\frac{(n-1)C_n^1\sin[(n-1)\alpha_1+\alpha]+2(n-2)C_n^2\sin[(n-2)\alpha_1+2\alpha]+\cdots+(n-1)C_n^1\sin(\alpha_1+(n-1)\alpha]}{\sin n\alpha_1+C_n^1\sin[(n-1)\alpha_1+\alpha]+\cdots+\sin n\alpha} = \frac{n(n-1)}{4\cos^2\frac{\alpha-\alpha_1}{2}},$$

stabilită de autor în articolul, „*Asupra unor identități trigonometrice*“, în „R. M. T.“, Anul al XI, pag. 77 și anume pentru $n=4$.

Au dat soluții în acest sens, d-nii: *Boerescu George* (lic. Oltenița), *Coandă I. Virgil* (lic. Milit., Craiova), *Dăscălescu Hristache* (student, București), *Ivănescu Cezar* (lic. Bârlad), *Jeba C. C-tin* (Șc. Polit., Timișoara), *Margulius Marius* (lic. Spiru-Haret, București), *Marșieu Teodor* (Șc. Polit., Timișoara), *Motoc D. M.* (lic. Oltenița), *Negrea A. Leonte-Mircea* (student, București), *Predoescu I. Marin* (lic. Buzeștl, Craiova) și *Predoiu Florin* (Șc. Navală).

1046. — *Dreptunghiul* A B C D (A B = a, B C = b), *se roteşte în jurul vârfului* A *de unghiul* α. *Să se arate că:*

1°. *Dacă* α *verifică relaţia:*

$$\frac{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)}{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)}=\left(\frac{a+b}{a-b}\right)^2,$$

atunci aria triunghiului C A C', — A B' C' D' *fiind dreptunghiul rotit, — este egală cu a dreptunghiului dat. Să se deducă de aci valoarea lui* α *în funcţie de unghiul* B A C = θ. *Cazul când* $a=b$.

2°. *Dacă* α *verifică relaţia:*

$$1+\sin\frac{\alpha}{2}=\frac{a+b}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

perimetrul triunghiului C A C' *este egal cu acel al dreptunghiului dat. Să se găsească* α *când* $a=b$.

AUGUST COMAN

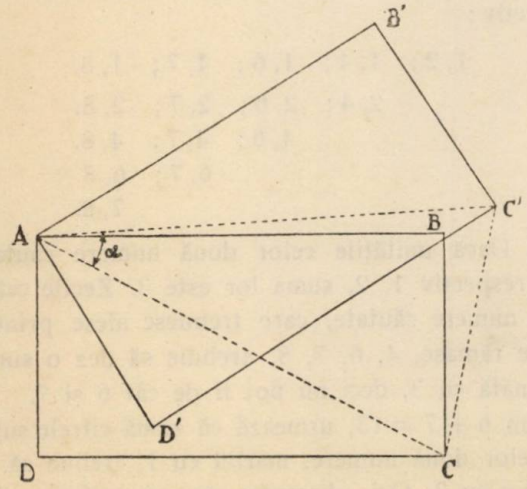
1°. Suprafaţa S a triunghiului C A C' este:

$$S=\frac{\overline{AC}\cdot\overline{AC'}\sin\alpha}{2},$$

sau

$$(1)\qquad S=\frac{(a^2+b^2)\sin\alpha}{2},$$

căci $AC=AC'=\sqrt{a^2+b^2}$.



Să exprimăm acum pe $\sin\alpha$ în funcţie de a şi b.

In adevăr prima relaţie din enunţ, se mai poate scri:

$$\frac{1+\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1-\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}:\frac{1-\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}=\left(\frac{a+b}{a-b}\right)^2,$$

sau:

$$\frac{\left(1+\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right)^2}{\left(1-\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right)^2}=\left(\frac{a+b}{a-b}\right)^2.$$

Extrăgând rădăcina patrată, găsim

$$\frac{1+\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1-\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}=\frac{a+b}{a-b},\quad\text{sau}\quad\frac{1+\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1-\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}=\frac{a+b}{b-a}.$$

Aplicând o proprietate cunoscută a proporţiilor, avem:

$$\frac{1+\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}-1+\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}+1-\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}=\frac{a+b-a+b}{a+b+a-b},$$

sau

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{b}{a}\quad\text{şi analog}\quad\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{a}{b}.$$

Inlocuind aceste valori în relaţia cunoscută,

$$\sin\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}},$$

obţinem:

$$\sin\alpha=\frac{2\frac{b}{a}}{1+\frac{b^2}{a^2}}=\frac{2ab}{a^2+b^2}$$

şi

$$\sin\alpha=\frac{2\frac{a}{b}}{1+\frac{a^2}{b^2}}=\frac{2ab}{a^2+b^2}.$$

Inlocuind aceste valori în (1), obţinem:

$$S=ab,$$

adică suprafaţa triunghiului C A C' este egală cu a dreptunghiului A B C D.

Valoarea lui α în funcţie de unghiul $BAC=\theta$.
Triunghiul dreptunghic BAC, ne dă,

$$b=a\operatorname{tg}\theta \quad \text{sau,} \quad \operatorname{tg}\theta=\frac{b}{a}\cdot$$

Dar am văzut că,

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{b}{a} \quad \text{şi} \quad \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{a}{b},$$

astfel că rezultă:

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\operatorname{tg}\theta,$$

de unde $\alpha=2\theta$, şi mai general, $\alpha=2\theta+2k\pi$;

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\operatorname{cotg}\theta=\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right),$$

de unde $\alpha=(2k+1)\pi-2\theta$.

Când $a=b$, dreptunghiul devine patrat, deci $\theta=45^0$ şi atunci

$$\alpha=90^0+2k\pi, \quad \text{sau} \quad \alpha=\left(2k+\frac{1}{2}\right)\pi.$$

2°. Perimetrul $2p$ a triunghiului CAC', este:

$$2p=\overline{AC}+\overline{AC'}+\overline{CC'}=\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{a^2+b^2}+\overline{CC'}$$

Dar

$$\overline{CC'}=2\,\overline{AC}\sin\frac{\alpha}{2}=2\sqrt{a^2+b^2}\sin\frac{\alpha}{2},$$

astfel că:

$$(2) \qquad 2p=2\sqrt{a^2+b^2}\left(1+\sin\frac{\alpha}{2}\right)\cdot$$

In cazul ipotezei din enunţ,

$$1+\sin\frac{\alpha}{2}=\frac{a+b}{\sqrt{a^2+b^2}},$$

relaţia (2) devine:

$$2p=\frac{2(a+b)\sqrt{a^2+b^2}}{\sqrt{a^2+b^2}}=2(a+b).$$

Perimetrul triunghiului CAC' este deci în acest caz egal cu acel al dreptunghiului dat ABCD.

Calculul lui α pentru $a=b$.

In acest caz avem:

$$1+\sin\frac{\alpha}{2}=\frac{2a}{a\sqrt{2}}=\sqrt{2},$$

de unde:

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\sqrt{2}-1=1{,}41421-1=0{,}41421.$$

Luând logaritmii, avem:

$$\log\sin\frac{\alpha}{2}=\bar{1}{,}61722,$$

de unde trecând la arce, deducem:

$$\frac{\alpha}{2}=24^0,\ 28',\ 10'',\ 7, \quad \text{deci:} \quad \alpha=48^0,\ 56',\ 21''.$$

Soluţii date de d-nii: *Dan Traian* (lic. Beiuş), *Dobos Ernest* (student, Cluj), *Fofiu Cornel* (lic. Beiuş), *Ivănescu Cezar* (lic. Bârlad), *Margulius Marius* (lic. Spiru Haret, Bucureşti), *Matei D. D-tru* (lic. Internat, Iaşi), *Mereuţă Emilian* (student, Bucureşti), *Motoc D. Mircea* (lic. Oltenita), *Negrea A. Leonte-Mircea* (student, Bucureşti), *Pop Leontin* (Şc. Polit., Timişoara), *Popa B. Ioan* (Şc. Polit., Timişoara), *Predoiu Fl.* (Şc. Navală), *Savovici Florentin* (Lic. Milit, Tg-Mureş), *Sova C. I. Grigoreni* (Şc. Milit., de Geniu), *Süli Mihai* (Şc. Polit., Timişoara), *Tăutu Ştefan* (lic. Roman) şi *Trică S. Ioan* (Constanţa).

1113 [1]. — *Suma a două numere de trei cifre, care cuprind toate cifrele primelor patru cuburi perfecte, este un număr care are ultimele trei cifre identice.*

SUB.-LT. IOAN C. SAVIN

Primele patru cuburi perfecte sunt, 1 ; 8 ; 27 şi 64.

Avem deci la dizpoziţie cifrele, 1, 2, 4, 6, 7, 8 pentru a forma două numere de trei cifre, a căror sumă să aibă trei cifre identice.

Unităţile celor două numere cerute, pot fi respectiv:

1, 2 ;	1, 4 ;	1, 6 ;	1, 7 ;	1, 8.
	2, 4 ;	2, 6 ;	2, 7 ;	2, 8.
		4, 6 ;	4, 7 ;	4, 8.
			6, 7 ;	6, 8.
				7, 8.

1°. Dacă unităţile celor două numere căutate sunt respectiv 1, 2, suma lor este 3. Zecile celor două numere căutate, care trebuesc alese printre cifrele rămase, 4, 6, 7, 8, trebuie să dea o sumă terminată cu 3, deci nu pot fi de cât 6 şi 7.

Cum $6+7=13$, urmează că sumă cifrele sutelor celor două numere, mărită cu 1, trebue să se termine cu 3. Ori, observăm că pentru cifrele sutelor, au rămas cifrele 8 şi 4 şi $8+4+1=13$, se termină cu 3.

[1]) Enunţ rectificat.

Avem deci următoarele 4 soluţii:

$$\frac{471}{862};\quad \frac{461}{872};\quad \frac{871}{462};\quad \frac{861}{472}.$$

Suma acestor perechi de numere este 1333, care are trei cifre identice.

2°. Dacă unităţile numerilor căutate ar fi respectiv 1, 4, suma lor ar fi 5. Zecile numerile căutate, n'ar putea fi de cât 8 şi 7, a căror sumă este 15. Dar cifrele rămase 2, 6 nu dau o sumă care mărită cu 1, să se termine cu 5, deci n'avem soluţii în acest caz.

3°. Dacă unităţile numerelor căutate ar fi respectiv 1, 6, suma lor ar fi 7. Dar din cifrele rămase, 2, 4, 7, 8, dintre care trebuesc alese zecile celor două numere căutate, nu găsim două, a căror sumă să se termine cu 7, deci n'avem soluţii în acest caz.

4°. Dacă unităţile numerelor căutate ar fi respectiv 1, 7, suma lor ar fi 8. Zecile numerilor căutate, n'ar putea fi de cât 2, 6. Dar cifrele rămase 4, 8 nu dau o sumă terminată cu 8, deci n'avem soluţii în acest caz.

5°. Dacă unităţile numerelor căutate ar fi respectiv, 1, 8, suma lor ar fi 9. Zecile numerelor căutate, n'ar putea fi de cât 2, 7. Dar cifrele rămase 4, 6, nu dau o sumă terminată cu 9, deci n'avem soluţii în acest caz.

6°. Dacă unităţile numerelor căutate ar fi respectiv, 2, 4, suma lor ar fi 6. Dar din cifrele rămase, 1, 6, 7, 8, printre care ar trebui să alegem zecile celor două numere căutate, nu găsim două, a căror sumă să se termine cu 6, deci în acest caz n'avem soluţii.

7°. Dacă unităţile numerelor căutate ar fi respectiv, 2, 6, suma lor ar fi 8. Zecile numerilor căutate, n'ar putea fi de cât 1, 7. Dar cifrele rămase 4, 8 nu dau o sumă terminată cu 8, deci n'avem soluţii în acest caz.

8°. Dacă unităţile numerelor căutate ar fi respectiv 2, 7, suma lor ar fi 9. Zecile numerilor căutate, n'ar putea fi de cât 1, 8 Dar cifrele rămase 4, 6, nu dau o sumă terminată cu 9, deci n'avem soluţii în acest caz.

9°. Dacă unităţile numerelor căutate ar fi, 2, 8, suma lor ar fi 10. Zecile numerilor căutate, care trebuesc alese dintre cifrele rămase, 1, 4, 6, 7 trebue să dea evident o sumă terminată cu 9, dar dintre ele, nu sunt două cifre a căror sumă să fie 9, deci n'avem soluţii în acest caz.

10°. Dacă unităţile numerelor căutate ar fi, 4, 6, suma lor ar fi 10. Zecile numerilor căutate, care trebuesc alese dintre cifrele rămase 1, 2, 7, 8, trebuie să dea evident o sumă terminată cu 9. Observăm în acest caz, că putem lua pentru zecile numerilor căutate 1, 8 sau 2, 7, cifra sutelor putând fi respectiv 2, 7 şi 1, 8. In acest caz avem astfel următoarele 8 soluţii:

$$\frac{126}{874};\quad \frac{176}{824};\quad \frac{216}{784};\quad \frac{286}{714};\quad \frac{716}{284};\quad \frac{786}{214};\quad \frac{826}{174};\quad \frac{876}{124}.$$

Suma acestor perechi de numere este 1000, care are trei cifre identice.

11°. Dacă unităţile numerilor căutate ar fi 4, 7, suma lor ar fi 11. Zecile numerilor căutate, ar putea fi 2, 8, dar cifrele rămase 1, 7 care ar fi cifrele sutelor numerilor rămase, n'ar da o sumă terminată cu 1, deci n'avem soluţii în acest caz.

12°. Dacă unităţile numerelor căutate ar fi 4, 8, suma lor ar fi 12. Zecile numerilor căutate, care trebuesc alese dintre cifrele rămase 1, 2, 6, 7, trebuesc să dea evident o sumă terminată cu 1, dar dintre ele nu sunt două cifre a căror sumă să se poată termina cu 1, deci n'avem soluţii în acest caz.

13°. Dacă unităţile numerilor căutate ar fi, 6, 7, suma lor ar fi 13. Zecile numerilor căutate ar putea fi 4, 8, dar cifrele rămase 1, 2, nu dau o sumă terminată cu 2, deci n'avem soluţii în acest caz.

14°. Dacă unităţile numerilor căutate ar fi 6, 8, suma lor ar fi 14. Dintre cifrele rămase, 1, 2, 4, 7, printre care ar trebui alese cifrele zecilor numerilor căutate, 1 şi 2 sunt bune, dar suma cifrelor rămase nu se termină cu 4, deci n'avem soluţii în acest caz.

15°. Dacă unităţile numerilor căutate ar fi, 7, 8, suma lor ar fi 15. Dintre cifrele rămase, 1, 2, 4, 6, printre care ar trebui alese cifrele zecilor numerilor căutate, nu se găsesc două a căror sumă să se termine cu 4, deci n'avem soluţii în acest caz.

Avem deci în total 12 soluţii pentru problema dată, acelea găsite la punctele 1° şi 10°.

Au soluționat problema, prin încercări, d-nii: *Amărăsteanu F. Marcel* (lic. Buzești, Craiova), 8 soluții; *Arbter Emil* (lic. Beiuș), 12 soluții; *Crișan T. Iacob* (lic. Milit., Tg-Mureș), 12 soluții; *Mehedinți D-tru* (lic. Milit, Tg-Mureș), 7 soluții; *Mihalcea N. Nicolae* (lic. Beiuș), 4 soluții; *Popescu Adrian* (student), 8 soluții; *Predoescu Traian* (lic. Milit., Craiova), 8 soluții; *Procopiescu Mihai* (lic. Milit, Tg-Mureș), 4 soluții; *Theodoridi G. Lucian* (Șc. de Ofițeri de Geniu), 4 soluții; *Tica P. Marin-Gal*, 12 soluții; *Tutunaru Gr. D-tru* (Șc. de Ofițeri), 4 soluții și *Țarălungă D-tru* (lic. Milit., Tg-Mureș), 12 soluții.

1141. — *In triunghiul* ABC *se duc la cercul înscris, tangente paralele cu laturile și se obțin trei triunghiuri. Fie* r_1, r_2, r_3; p_1, p_2, p_3; S_1, S_2, S_3 *respectiv razele înscrise, semiperimetrele și ariile celor trei triunghiuri mici. Să se stabilească relațiile*

$$p_1+p_2+p_3=p,$$

$$p_1p_2+p_2p_3+p_3p_1=(r_1+r_2+r_3)(r_a+r_b+r_c)$$

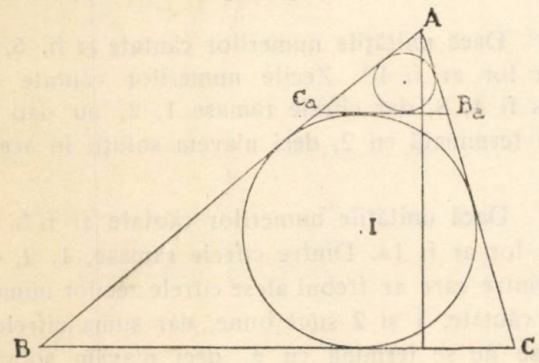
$$p_1p_2p_3=(r_1+r_2+r_3)^3(p_1+p_2+p_3)$$

$$\sqrt{S_1}+\sqrt{S_2}+\sqrt{S_3}=\sqrt{S},$$

r_a, r_b, r_c, S *fiind notațiile obicinuite la triunghiul* ABC.

CEZAR COSNITA

Fie B_a, C_a punctele unde tangenta paralelă cu BC tae pe AB și AC. Triunghiurile AB_aC_a și ABC sunt asemenea și raportul de asemănare a elementelor omoloage din cele două triunghiuri, este cum se observă pe figură:



$$\frac{h_a-2r}{h_a}=\frac{ph_a-2pr}{ph_a}=\frac{ph_a-2S}{ph_a}=$$

$$\frac{ph_a-ah_a}{ph_c}=\frac{p-a}{p}.$$

Rezultă de aci:

$$\frac{p_1}{p}=\frac{p-a}{p}, \quad \text{sau} \quad p_1=p-a;$$

apoi:

$$r_1=\frac{(p-a)r}{p}, \quad S_1=\frac{(p-a)^2}{p^2}S.$$

Avem relații analoage pentru p_2, p_3; S_2, S_3.

Ținând seamă de toate aceste relații, putem deduce succesiv:

1°. $p_1+p_2+p_3=p-a+p-b+p-c=3p-2p=p.$

Avem astfel stabilită prima relație cerută.

2°. $$r_1+r_2+r_3=\frac{p-a+p-b+p-c}{p}r=r$$

și deci:

$$p_1p_2+p_2p_3+p_3p_1=\sum(p-a)(p-b)=$$

$$\sum\frac{p(p-a)(p-b)(p-c)}{p(p-c)}=\frac{S}{p}\sum\frac{S}{p-c}=$$

$$r\sum r_c=(r_1+r_2+r_3)(r_a+r_b+r_c).$$

Avem astfel stabilită a 2-a relație din enunț.

3°. $$p_1p_2p_3=(p-a)(p-b)(p-c)=$$

$$\frac{p(p-a)(p-b)(p-c)}{p}=\frac{S^2}{p}=\frac{p^2r^2}{p}=$$

$$r^2p=(r_1+r_2+r_3)^2(p_1+p_2+p_3).$$

A treia relație cerută este astfel stabilită.

4°. $$\sqrt{S_1}+\sqrt{S_2}+\sqrt{S_3}=\sqrt{S}\left(\frac{p-a}{p}+\right.$$

$$\left.\frac{p-b}{p}+\frac{p-c}{p}\right)=\sqrt{S}\,\frac{3p-2p}{p}=\sqrt{S}.$$

Vedem că și a 4-a relație este stabilită.

Soluții date de d-nii: *Ivănescu Cezar* (Bărlad), *Mazilu C. Panait* (lic. Internat, Iași), *Milea Ch. E.* (Sub-Lt), *Negrea A. Leonte Mircea* (Brăila) și *Sâmbotin Gh.* (Sub-Lt).

1549. — *Să se găsească relațiunea dintre laturile unui triunghiu* ABC, *știind că dacă* V_a, V_b, V_c *sunt volumele născute de triunghiu, când se rotește respectiv în jurul laturilor a, b, c, avem relația:*

$$\frac{2}{V_a}=\frac{1}{V_b}+\frac{1}{V_c}.$$

ION RIZESCU

Fie, a, b, c; h_a, h_b, h_c laturile și înălțimile corespunzătoare ale unui triunghiu oarecare ABC

Rotind triunghiul A B C în jurul laturei B C = a, obţinem două conuri circulare, ale căror volume însumate sau scăzute, după cum piciorul D al înălţimei din A cade pe B C sau în afară, ne dă volumul V_a, avem deci:

$$V_a = \frac{1}{3}\pi h_a^2 \cdot \overline{BD} \pm \frac{1}{3}\pi h_a^2 \cdot \overline{CD} =$$

$$\frac{1}{3}\pi h_a^2 (\overline{BD} \pm CD).$$

Dacă D este între B şi C, atunci $\overline{BD}+\overline{CD}=a$, iar dacă D este în afară de B C, avem $\overline{BD}-\overline{CD}=a$.

In ambele cazuri, rezultă

$$(1) \qquad V_a = \frac{\pi h_a^2 a}{3}$$

Analog, avem:

$$(2) \qquad V_b = \frac{\pi h_b^2 b}{3}, \quad V_c = \frac{\pi h_c^2 c}{3}.$$

Relaţia din enunţ, având în vedere relaţiile (1) şi (2), se transformă astfel:

$$\frac{6}{\pi a h_c^2} = \frac{3}{\pi b h_b^2} + \frac{3}{\pi c h_c^2}.$$

Simplificând prin $\frac{3}{\pi}$, observăm că relaţia rămasă se mai poate scri:

$$(3) \qquad \frac{2a}{a^2 h_a^2} = \frac{b}{b^2 h_b^2} + \frac{c}{c^2 h_c^2}.$$

Dar,

$$a h_a = b h_b = c h_c = 2S,$$

astfel că relaţia (3) se reduce la următoarea:

$$2a = b + c.$$

Aceasta este relaţia dintre laturi, cerută.

Observare. Privind enunţul şi rezultatul, putem enunţa:

Pentru că V_a să fie media armonică a volumelor V_b şi V_c, trebue ca latura a să fie media aritmetică a laturilor b şi c.

Soluţii date de d-rele: *Comloşan Cornelia* (studentă, Cluj), *Crittia Livia* (lic. „Domniţa Ileana" Constanţa) şi de d-nii: *Amărăşteanu F. Marcel* (Şc. Polit., Bucureşti), *Anton G. Gheorghe* (lic. Bistriţa), *Apostol V. Radu* (lic. Milit., N. Filipescu), *Beloiu B. D-tru* (lic. Milit, N. Filipescu), *Constantinescu C. Vasile* (lic Milit., Tg-Mureş), *Ellenbogen Natan* (lic. Bistriţa), *Lăzărescu P. Stelian* (lic Milit., N. Filipescu), *Mateiu D. D-tru* (bacalaureat), *Milu I. Nicolae* (Şc. Pregăt. de Ofiţeri), *Negrea A. Leonte Mircea* (Brăila), *Rădulescu G. Octavian* (lic. Milit, N. Filipescu), *Ripianu Andrei, Stefănescu Costin* (lic. Milit, N. Filipescu), *Stefănescu D. Nicolae Tatomir M. G.* (lic. Milit., N. Filipescu), *Tilică C. Stefan* (lic. T-Severin).

1550. — *Să se rezolve ecuaţia,*

$$\sqrt{x+\frac{1}{2}} - \sqrt{x-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

şi să se verifice soluţiile aflate.

L-T. C. IONESCU-ŢIU

Ridicăm la patrat ecuaţia dată şi avem:

$$x+\frac{1}{2}+x-\frac{1}{2}-2\sqrt{x^2-\frac{1}{4}} = \frac{1}{x},$$

sau:

$$2x - \frac{1}{x} = 2\sqrt{x^2-\frac{1}{4}}.$$

Ridicăm şi această ecuaţie la patrat, obţinem:

$$4x^2 + \frac{1}{x^2} - 4 = 4x^2 - 1,$$

sau:

$$(1) \qquad \frac{1}{x^2} = 3.$$

De aci deducem:

$$(1') \qquad x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}} = \pm 0{,}5773\ldots$$

Rămâne să vedem dacă soluţiile (1') ale ecuaţiei (1) sunt şi soluţii pentru ecuaţia dată, ceea-ce ne obligă a face verificare.

Verificare. 1°. Pentru $x = 0{,}5773\ldots$, ecuaţia dată devine:

$$\sqrt{1{,}0773\ldots} - \sqrt{0{,}0773\ldots} = \frac{1}{\sqrt{0{,}5773\ldots}}.$$

Inmulţind şi împărţind în primul membru cu conjugata sa, avem:

$$(2) \qquad \frac{1}{\sqrt{1{,}0773\ldots}+\sqrt{0{,}0773\ldots}} = \frac{1}{\sqrt{0{,}5773\ldots}}.$$

Vedem însă imediat că această egalitate nu este justă, deci

$$x = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

nu este rădăcină pentru ecuaţia dată.

2°. Pentru

$$x = -\frac{1}{\sqrt{3}} = -0{,}5773\ldots,$$

ecuaţia dată devine:

$$\sqrt{-0{,}0773\ldots} - \sqrt{-1{,}0773\ldots} = \frac{1}{\sqrt{-0{,}5773\ldots}}.$$

Inmulţind cu $\sqrt{-1}$ obţinem:

$$\sqrt{0{,}0773\ldots} - \sqrt{1{,}0773\ldots} = \frac{\sqrt{-1}}{\sqrt{-0{,}5773\ldots}} = \frac{-1}{\sqrt{0{,}5733\ldots}},$$

care relaţie iarăşi nu este adevărată, căci înmulţind'o cu (—1) avem relaţia (2), care am văzut că nu este justă.

Urmează că nici $x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ nu verifică ecuaţia dată.

Observare. Dacă privim ecuaţia dată, putem observa că $x = \infty$ este o soluţie a ei, căci o verifică, ambii membrii reducânduse la zero.

In toate soluţiile ce s'au primit, verificarea s'a făcut prin aceleaşi ridicări la patrat, ce au fost necesare pentru rezolvarea ecuaţiei. Din această cauză, în toate soluţiile trimise, se răspunde că ecuaţia dată admite ambele sau numai una din rădăcinele $x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$.

In felul aceasta s'au primit soluţii dela d-ra: *Comloşan Cornelia* (Cluj) şi de la d-nii: *Amărăşteanu F. Marcel, Anastasescu M. Mihail, Anton George, Jidanu I. C-tin, Leibovici Serge, Rădulescu Gh. Octavian, Ripianu Andrei, Rosemberg I., Savu I. Victor, Staicu I. Nicolae, Ştefănescu Costin, Tica P. Marin, Titică C. Ştefan, Ţărălungă D-tru, Vlad C. I. Mihai* şi *Zagaican Ilie.*

PROBLEME PROPUSE

1625. — Să se găsească patratul perfect $abcd$, în care c, d, b formează o progresie aritmetică cu raţia 3.

SUB-LT. MARIN P. TICA-GALL

1626. — Să se găsească două numere astfel ca patratele lor să fie respectiv de forma ABB şi BBA, unde A şi B (A < B) sunt patrate de două cifre însemnătoare.

SUB-LT MIRCEA GRUMAZESCU

1627. — Fie α şi α', β şi β', γ şi γ' proectiunile ortogonale a unui punct P oarecare al planului unui triunghiu ABC, pe două din bisectoarele unghiurilor A, B, C. Să se arate că dreptele $\alpha\alpha'$, $\beta\beta'$, $\gamma\gamma'$ sunt concurente.

V. THÉBAULT

1628. — Două cercuri O şi O_1 se tae în P şi P_1. Se uneşte punctul A, variabil pe cercul O, cu P şi P_1. Dreptele AP şi AP_1 tae cercul O_1 a 2-oară în B şi C. Fie B_1 şi C_1 intersecţiile dreptelor AO, BO_1 şi AO, CO_1. Se cere locul punctelor B_1 şi C_1.

LOCOT. I. GH. ZAMFIRESCU

1629. — Să se determine două numere întregi x şi y astfel ca suma lor şi suma patratelor lor să fie fiecare un patrat perfect.

A. GLODEN

1630. — Să se rezolve în numere întregi, ecuaţia:

$$x^2 + 4y^2 = z^4.$$

D. GEORGESCU

1631. — Să se stabilească identitatea:

$$2^4 \sin\frac{\pi}{15}\sin\frac{2\pi}{15}\sin\frac{4\pi}{15}\sin\frac{7\pi}{15} = 1.$$

V ALACI

1632. — In problema 2755, rezolvată în *„Gazeta Matematică"*, Vol. XXVIII, pagina 59, s'a demonstrat că există triunghiuri pentru care

$$\sin A = \cos B = \operatorname{tg} C = \alpha.$$

Să se demonstreze că există triunghiuri în care au loc relaţiuni ca acestea şi între alte trei din cele şase linii trigonometrice cunoscute.

G-L GH. BUICLIU

Manuscrise primite de la corespondenţii noştrii până la 10 a lunei curente şi anume: Articole (A), Note (N), probleme propuse (P) şi probleme rezolvate indicate prin numărul lor de ordine.

Aman V. C-tin (1567, 1568, 1569, 1573, 1574); *Andrievici N.* (P.); *Andrunachievici Al. Vladimir* (1578, 1580, 1581, 1583, 1584, 1591, 1592, 1594, 1597, 1598, 1599, 1601, 1605, 1606, 1608, 1611, 1614, 1616, 1620, 1623); *Begu I. Ştefan* (1474, 1488, 1562, 1568, 1572, 1579, 1580, 1581, 1585, 1587, 1590, 1598, 1603, 1608, 1614, 1616); *Brădeanu Nicolae* (1572, 1579, 1580, 1598, 1603); *Buznea D. Dinu* (P., 1616, 1620); *Cernat Camil* (1611, 1616); *Dăscălescu Şt. Hristache* (1581, 1587, 1599, 1601, 1608, 1611, 1614, 1616, 1617); *Diaconescu Marcel* (1611); *Drăgulescu Gh. Gheorghe* (1620); *Ghiţescu Spiridon* (A.); *Gloden A.* (N.); *Jidanu I. C-tin* (P., 1570, 1572, 1591, 1599, 1606, 1616 1620); *Postelnicescu C. M.* (P.); *Roth I. Alexandru* (P. 1570, 1571, 1587, 1592, 1603, 1616); *Săruleşteanu I. Emanoil* (1584); *Solomon I. Isac* (1562, 1567, 1570, 1572, 1573, 1579, 1580, 1584, 1585, 1587, 1591, 1592, 1598, 1599, 1601, 1603, 1608, 1611, 1616, 1620); *Staicu I.* (1620); *Stoenescu D. Mirel* (1579 1614, 1620); *Theodorescu N. Dorin* (1315, 1611, 1614, 1616); *Tilică C. Ştefan* (982, 1008, 1177, 1492, 1578, 1598, 1599, 1602, 1603, 1606, 1617, 1620); *Vişa Eugen* (1569); *Vlad I. C. M.* (P., 1572, 1579, 1587, 1591, 1611); *Voicu I. Aurelian* (1620).

INFORMAŢIUNI

La Redacţiunea „Revistei Matematice din Timişoara" se primesc abonamente pentru:

BOLETIN MATEMATICO

ANUL AL X-LEA

care a început în Martie 1937.

Costul *special* a unui abonament este de 200 lei.

Această Revistă se publică în Buenos-Aires, Republica Argentina.

Pentru anul al X-lea care a început în Martie 1937, s'au primit până acum la Redacţia „R. M. T." următoarele abonamente:

1. Locotenent *Costăchescu Constantin,* Distrugătorul *„Regina Maria",* Constanţa.
2. Profesor *I. Nemet,* Casa învăţătorilor, str. Remus, Timişoara.
3. *Teofil Vescan,* Calea Regele Ferdinand No. 110, Cluj.
4. Profesor *Spiridon Ghiţescu,* liceul de băeţi din Mizil.
5. Student *Nichita Bododea,* Bulevardul Al. I. Cuza No. 27, Bucureşti.
6. Prof. *Sergescu P.,* Universitatea, Cluj.

Răspundem pe această cale, la toţi acei corespondenţii, care se plâng că anumite probleme nu le-au fost considerate, că aceasta se datoreşte sau faptului că acele soluţiuni au sosit întârziate, sau au fost greşite, sau n'au sosit de loc.

Evident că astfel de probleme nu pot fi luate, în seamă.

Fiecare problemă rezolvată trebuie să fie scrisă aparte şi să nu se continue cu alte probleme, căci nu se pot repartiza la numerile corespunzătoare, deci nu pot fi luate în seamă.

SPHINX

Revue mensuelle des questions récréatives

FONDÉE EN 1931

REVUE UNIQUE DANS SON GENRE
dans le monde entier

ABONNEMENTS :
1 an : Belgique, **30 fr.** France, **25** fr.
Etranger, 7 **belgas**

Administration :
SPHINX, Bruxelles 173, Avenue Longchamp

Toţi cei ce ne trimet articole, note, probleme propuse sau rezolvate, pentru a fi luate în consideraţie, sunt obligaţi a fi abonaţi la Revista Matematică din Timişoara.

Anunţăm că nu vom mai lua în considerare problemele rezolvate, iscălite de mai mulţi corespondenţi. Fiecare corespondent trebue să-şi redacteze problema rezolvată de el, şi s'o iscălească.

Legându-se colecţia R. M. T., anul XV, în volum şi rămânând numere răzleţe care nu au putut fi legate, putem trimete corespondenţilor noştri numere care eventual le lipsesc din colecţie în schimbul sumei de 10 lei. Doritorii se vor adresa administraţiei revistei, trimiţând suma prin mandat poştal.

ANUL XVII. 15 DECEMVRIE 1937 NO. 10.

REVISTA MATEMATICĂ
DIN
TIMIȘOARA

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA APARE ODATA PE LUNA.
PREȚUL UNUI NUMAR 12 LEI PREȚUL ABONAMENTULUI 100 LEI PE AN.

CUPRINSUL

1. EUGEN VIȘA: ASUPRA UNEI INSUMARI
2. NOTE MATEMATICE: 21, 22, 23.
3. CHESTIUNI DE EXAMEN
4. BIBLIOGRAFIE.
5. PROBLEME REZOLVATE: 462, 953, 1467, 1477, 1481.
6. PROBLEME PROPUSE: 1625-1632.
7. INFORMATIUNI

TIMISOARA
Institutul de Arte grafice Tipografia Românească

„Orice profesor de matematici, din orice colţ al ţării şi de la orice şcoală, trebuie să fie apostol al specialităţii sale. Din felul cald şi luminos cum îşi face lecţiile, din drumul drept şi demn pe care îl urmează în viaţă, trebuie să apară limpede că judecata matematică precisă şi sigură, curată ca cristalul, are o înaltă şi admirabilă valoare educativă pentru viaţă.

Adevărul curat, adevărul drept, adevărul luminos, să fie îndreptarul vieţei noastre. Aceasta să fie contribuţia specialităţii noastre la îndrumarea neamului românesc, pe calea care-i stă deschisă".

G. ŢIŢEICA

Manuscrisele destinate Revistei Matematice din Timişoara conţinând soluţiunile problemelor propuse şi probleme, note sau articole originale vor fi trimise pe adresa: **V. Alaci,** profesor Şcoala Politechnică, Timişoara.

Plata abonamentului precum şi reclamaţiunile de neprimirea Revistei vor fi adresate d-lui **Prof. C. Teodorescu,** Rectorul Şcoalei Politechnice din Timişoara.

Plata abonamentului se face prin CEC (Casa de economii şi cecuri postale) unde revista are contul CEC No. 85208, sau prin mandat postal adresat d-lui Prof. C. TEODORESCU, Rectorul Şcoalei Politechnice din Timişoara.

Taxa de Membru în „Comitetul de Conducere al Revistei Matematice din Timişoara" este pentru anul XVII, de 200 (două sute) lei.

Colecţia R. M. T., se găseşte la Administraţia Revistei, şi se poate procura în schimbul preţului:

Anul I, epuizat. Anii: II—XVI inclusiv, broşate, 120 lei fiecare.

ANUL XVII — NO. 10 TIMISOARA, 15 DECEMVRIE 1937

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA

APARE LA 15 A FIECAREI LUNI

PREŢUL UNUI NUMAR . . . . . 12 LEI
ABONAMENT ANUAL . . . . . 100 LEI
Abonamentele sunt socotite totdeauna dela 15 Martie

REDACŢIA: Prof. V. ALACI
Şcoala Politechnică din Timişoara.
ADMINISTRAŢIA: Prof. C. TEODORESCU
Rectorul Şcoalei Politechnice din Timişoara.

ASUPRA UNEI ÎNSUMĂRI

de EUGEN VISA
Profesor, Blaj.

Se cunoaşte relaţia:

$$C_k^k + C_{k+1}^k + C_{k+2}^k + \cdots + C_{n-1}^k = C_n^{k+1}$$

unde simbolul C_p^k reprezintă numărul combinărilor de p obiecte luate câte k.

Fie mai general acum, să calculăm suma:

$$\text{(I)} \quad \boxed{\varphi_k(x) = C_k^k + C_{k+p}^k x + C_{k+2}^k x^2 + \cdots + C_{n-1}^k x^{n-k-1}},$$

care pentru $x = 1$ se reduce la primul membru al relaţiei de mai sus.

Voiu stabili în prealabil două proprietăţi relative la suma $\varphi_k(x)$, care se poate considera ca o funcţiune atât de x cât şi de k.

Proprietatea I. Funcţiunea $\varphi_k(x)$ definită prin relaţia (I) satisface relaţiei:

$$\text{(II)} \quad \boxed{\varphi_0^{(k)}(x) = k!\,\varphi_k(x)}$$

unde $\varphi_0^{(k)}$ reprezintă derivata de ordinul k în raport cu x a funcţiunii:

$$(1) \qquad \varphi_0(x) = 1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1},$$

iar $k!$, factorial de k.

Dacă relaţia de definiţie:

$$\varphi_i(x) = C_i^i + C_{i+1}^i x + \cdots + C_{i+k}^i x^k + \cdots$$
$$\cdots + C_{n-1}^i x^{n-i-1} = \sum_{j=0}^{n-i-1} C_{i+j}^i x^j$$

o derivăm de k ori şi observăm că primii k termeni dispar, obţinem:

$$(2) \qquad \varphi_i^{(k)}(x) = \sum_{j=k}^{n-i-1} C_{i+j}^i \cdot j\,(j-1)\ldots(j-k+1)\,x^{j-k}.$$

Cum avem evident:

$$C_{i+j}^i \cdot j(j-1)\ldots(j-k+1) =$$
$$\frac{(i+j)(i+j-1)\ldots(j+1)\,j(j-1)\ldots(j-k+1)}{i!}$$
$$= (i+1)(i+2)\ldots(i+k)\times$$
$$\frac{(i+j)(i+j-1)\ldots(j+1)\,j(j-1)\ldots(j-k+1)}{(i+k)!}$$
$$= (i+1)(i+2)\ldots(i+k)\cdot C_{i+j}^{i+k},$$

relaţia (2) se mai poate scrie:

$$(3) \qquad \varphi_i^{(k)}(x) = (i+1)(i+2)\ldots(i+k)\sum_{j=k}^{n-i-1} C_{i+j}^{i+k} x^{j-k}.$$

Or, se observă pe de altă parte că:

$$\sum_{j=k}^{n-i-j} C_{i+j}^{i+k} x^{j-k} = \varphi_{i+k}(x),$$

aşa încât, la rândul său, relaţia (3) se mai scrie:

$$\text{III)} \qquad \varphi_i^{(k)}(x) = (i+1)(i+2)\ldots(i+k)\cdot\varphi_{i+k}(x)$$

de unde, făcând $i = 0$, relaţia (II) rezultă imediat.

Proprietatea II. Funcţiunea $\varphi_k(x)$ definită prin relaţia (I) satisface relaţiei de recurenţă:

$$\text{(IV)} \quad \boxed{(1-x)\,\varphi_k(x) = \varphi_{k-1}(x) - C_n^k x^{n-k}}.$$

O metodă simplă pentru stabilirea relaţiei (IV) este următoarea:[1]

Inmulţim relaţia (I) cu x şi avem:

$$(4) \qquad x\,\varphi_k(x) = C_k^k x + C_{k+1}^k x^2 + C_{k+2}^k x^3 + \cdots$$
$$\cdots + C_{n-1}^k x^{n-k}.$$

Scăzând, la rândul său, relaţia (4) din (I), obţinem:

[1]) Relaţia (IV) se poate stabili şi plecând direct dela relaţia de definiţie a combinărilor:

$$C_{k-i}^k = C_{k+i-1}^k + C_{k+i-1}^{k-1}.$$

$$(1-x)\varphi_k(x) = C_k^k + (C_{k+1}^k - C_k^k)x + (C_{k+2}^k - C_{k+1}^k)x^2 + \cdots + (C_{n-1}^k - C_{n-2}^k)x^{n-k-1} - C_{n-1}^k x^{n-k},$$

ceeace, dacă ţinem seama de relaţia

$$C_{k+i}^k - C_{k+i-1}^k = C_{k+i-1}^{k-1},$$

se mai poate scrie şi sub forma:

$$(5)\quad (1-x)\varphi_k(x) = (C_{k-1}^{k-1} + C_k^{k-1}x + C_{k+1}^{k-1}x^2 + \cdots + C_{n-2}^{k-1}x^{n-k-1}) - C_{n-1}^k x^{n-k}.$$

Direct din (I) rezultă însă:

$$\varphi_{k-1}(x) = C_{k-1}^{k-1} + C_k^{k-1}x + C_{k+1}^{k-1}x^2 + \cdots + C_{n-2}^{k-1}x^{n-k-1} + C_{n-1}^{k-1}x^{n-k},$$

aşa încât (5) devine:

$$(6)\quad (1-x)\varphi_k(x) = \varphi_{k-1}(x) + (C_{n-2}^{k-1} - C_{n-1}^k)x^{n-k}$$

şi ţinând seama de faptul că

$$C_{n-2}^{k-1} - C_{n-1}^k = C_n^k$$

în cele din urmă avem:

$$(1-x)\varphi_k(x) = \varphi_{k-1}(x) + C_n^k x^{n-k},$$

adică chiar relaţia (IV).

Expresia sumei. Formula care urmează a ne da expresia sumei $\varphi_k(x)$ definită prin relaţia (I), se poate stabili în două moduri, după cum plecăm dela una sau dela celalaltă din cele două proprietăţi relative la această sumă şi pe cari le-am pus în evidenţă în cele ce preced.

a. Să considerăm în primul rând relaţia (II), unde suma particulară $\varphi_0(x)$ este definită prin relaţia (1).

Or, membrul al 2-lea al acestei relaţii din urmă este o progresie geometrică, a cărei sumă se ştie că este

$$(7)\quad \varphi_0(x) = \frac{1-x^n}{1-x}.$$

Să notăm acuma:

$$u = \frac{1}{1-x}, \qquad v = 1-x^n$$

şi să aplicăm formula cunoscută a lui *Leibnitz:*

$$(8)\quad \frac{d^k(u.v)}{dx^k} = \sum_{\alpha=0}^{k} C_k^\alpha \frac{d^{k-\alpha}u}{dx^{k-\alpha}} \cdot \frac{d^\alpha v}{dx^\alpha}$$

pentru calculul derivatei de ordinul k a funcţiunii $\varphi_0(x)$.

Pentru cazul nostru particular se constată uşor că avem:

$$\frac{d^i u}{dx^i} = \frac{i!}{(1-x)^{i+1}} \qquad (i \geqq 0)$$

$$\frac{d^i v}{dx^i} = -n(n-1)\ldots(n-i+1)x^{n-i} \quad (i \geqq 1),$$

aşa încât pentru acest caz formula (8) se va scrie:

$$(9)\quad \varphi_0^{(k)}(x) = \frac{k!}{(1-x)^{k+1}}(1-x^n) - \sum_{\alpha=1}^{k} C_k^\alpha \frac{(k-\alpha)}{(1-x)^{k-\alpha+1}} \cdot n(n-1)\ldots(n-\alpha+1)x^{n-\alpha}.$$

Intrucât avem însă:

$$C_k^\alpha = \frac{k!}{(k-\alpha)!\,\alpha!}$$

$$^{*}_{*}{}^{*} \quad C_k^\alpha (k-\alpha)!\, n(n-1)\ldots(n-\alpha+1) = k!\, C_n^\alpha,$$

(9) se mai poate scrie şi sub forma:

$$\varphi_0^{(k)}(x) = \frac{k!}{(1-x)^{k+1}}(1-x^n) - \sum_{\alpha=1}^{k} k!\, C_n^\alpha \frac{x^{n-\alpha}}{(1-x)^{k-\alpha+1}},$$

sau încă sub forma:

$$(10)\quad \varphi_0^{(k)}(x) = \frac{k!}{(1-x)^{k+1}}\left[1 - x^n \sum_{\alpha=0}^{k} C_n^\alpha \left(\frac{1-x}{x}\right)^\alpha\right].$$

Dacă se compară acum relaţia (II) cu relaţia (10), obţinem formula remarcabilă:

$$(V)\quad \boxed{\varphi_k(x) = \frac{1}{(1-x)^{k+1}}\left[1 - x^n \sum_{\alpha=0}^{k}\left(\frac{1-x}{x}\right)^\alpha\right]},$$

care ne permite să calculăm direct suma $\varphi_k(x)$ pentru toate valorile întregi pozitive ale lui k, inclusiv valoarea zero.

b. Să considerăm în al doilea rând relaţia (IV), care constitue obiectul celei de a doua proprietăţi a sumei $\varphi_k(x)$.

Prin înmulţire cu $(1-x)^{k-1}$, aceasta ne dă:

$$(1-x)^k \varphi_k(x) = (1-x)^{k-1}\varphi_{k-1}(x) - C_n^k x^{n-k}(1-x)^{k-1}$$

de unde, făcând succesiv $k = 1, 2, \ldots, k$, obţinem:

$$(11)\begin{cases}(1-x)\varphi_1(x)=\varphi_0(x)-C_n^1 x^{n-1}\\ (1-x)^2\varphi_2(x)=(1-x)\varphi_1(x)-C_n^2 x^{n-2}(1-x)\\ \vdots\\ (1-x)^k\varphi_k(x)=(1-x)^{k-1}\varphi_{k-1}(x)-C_n^k x^{n-k}(1-x)^{k-1}.\end{cases}$$

Insumând, la rândul lor, relaţiile (11) pe coloane, obţinem:

$$(12)\quad (1-x)^k\varphi_k(x)=\varphi_0(x)-\sum_{\alpha=1}^{k} C_n^\alpha x^{n-\alpha}(1-x)^{\alpha-1}$$

ceeace, dacă ţinem şi de astă dată seama de relaţia (7), se mai poate scrie şi sub forma:

$$(13)\quad (1-x)^k\varphi_k(x)=\frac{1-x^n}{1-x}-\sum_{\alpha=1}^{k} C_n^\alpha x^{n-\alpha}(1-x)^{\alpha-1}$$

sau încă sub forma:

$$(14)\quad (1-x)^{k+1}\varphi_k(x)=1-\sum_{\alpha=0}^{k} C_n^\alpha x^{n-\alpha}(1-x)^\alpha.$$

Or, din relaţia (14) deducem numai decât:

$$\varphi_k(x)=\frac{1}{(1-x)^{k+1}}\left[1-x^n\sum_{\alpha=0}^{k} C_n^\alpha\left(\frac{1-x}{x}\right)^\alpha\right],$$

adică chiar formula (V), care este astfel stabilită şi pe aceasta a doua cale.

Aplicaţii. Făcând în formula (V) $k=0$, deducem:

$$\varphi_0(x)=\frac{1-x^n}{1-x}$$

adică, tocmai expresia (7) a sumei $\varphi_0(x)$, pe care am definit-o prin relaţia (1) şi care constitue cel mai simplu caz particular al sumei $\varphi_k(x)$.

In mod analog, dacă facem în (V) $k=1$, obţinem formula:

$$(15)\qquad \varphi_1(x)=\frac{1-nx^{n-1}+(n-1)x^n}{(1-x)^2},$$

cu ajutorul căreia se calculează suma:

$$\varphi_1(x)=1+2x+3x^2+\cdots+(n-1)x^{n-2},$$

care constitue, ca simplicitate, al doilea caz particular al sumei $\varphi_k(x)$.

NOTE MATEMATICE

21. — *Enunţul problemelor practice.*

Continui cu ce terminam nota de la pag. 98 din No. 9 al acestei reviste. Datele care se pun în enunţul sau în alcătuirea problemelor practice, trebuie să fie aşa alese în cât atât acele date cât şi rezultatele la care se ajunge să corespundă în adevăr practicei. Un enunţ în care un aeroplan ar avea viteza de 15 (cincisprezea) km pe oră, sau care ar conduce la rezultatul că un car cu boi parcurge în 2 (două) ore distanţa Bucureşti-Ploeşti, nu este un enunţ practic.

In privinţa alcătuirei şi rezolvărei problemelor practice nu pot de cât că recomand cu toată căldura seria de articole scrise de d-l profesor *I. Ionescu* în *Gazeta Matematică*, Vol. XXXVIII şi XLIII, cu titlul *„Consideraţiuni practice la alcătuirea şi rezolvarea problemelor de matematică“*.

Parte din aceste consideraţiuni sunt sintetizate şi în întroducerea la *Culegere de Probleme de Aritmetică*, Ediţia II, întocmită de D-l *Profesor I. Ionescu* şi tipărită în biblioteca *„Gazeta Matematică“*.

Rândurile de faţă urmăresc să atragă atenţiunea asupra observaţiunilor admirabile şi practice ale d-lui Prof. *I. Ionescu* şi să mai adauge un exemplu din „R. M. T.“ la exemplul dat în nota de la pag. 98 citată.

Este vorba de problema 1537, rezolvată la pag. 70 din acest an. Se cere în acea problemă *anul de naştere* al unei persoane, care observă că anul ei de naştere este: *produsul între numerile care reprezintă vârsta sa acum şi anul trecut.*

Ecuaţia problemei este

$$\overset{*}{*}\overset{*}{*}\qquad 1936-x=x(x-1),\qquad x^2=1936$$

unde x este vârsta cerută, iar 1936 este *„acum“*, adică anul în care persoana face observaţia. Din întâmplare problema este propusă la 15 Decembrie 1936, deci datele enunţului se potriveau la acea epocă, ele nu se mai potriveau la 15 August 1937, când s-a publicat soluţia, dar se va potrivi în toţi anii N, care vor fi reprezentaţi prin patrate perfecte începând cu anul 1, de la creaţia lumei căci ecuaţia problemei este

$$\overset{*}{*}\overset{*}{*}\qquad N-x=x(x-1)\qquad N=x^2.$$

Practic, problema trebuia enunţată: *„In anul 1936, o persoană observă că . . .“*, dar atunci problema nu are absolut nici un interes.

Autorul problemei 1537 face şi o observare, anume că fenomenul din problemă *„se poate observa foarte rar“* el *„nu se va mai întâmpla de cât în anul* $2025 = 45^2$*“*.

Din contra, la fie-care an reprezentat prin un număr x^2 persoanele care trăesc în acel an vor putea zice ca persoana din enunţul problemei 1537.

Deci şi problema 1537 are un viciu nepractic în enunţul ei *„practic“* ca şi problema 99 şi ca atâtea alte probleme citate abondent şi cu multă documentare de d-l Prof. *I. Ionescu.*

G-L GH BUICLIU

22. — *Sur un procédé permettant d'obtenir des solutions entières de l'équation* $x^2 + y^2 = z^2 + t^{2k}$, $(k = 3, 5 \ldots 2n+1)$.

I. De l'égalité $mn = pq$ on déduit, en posant

$$2m = M + N, \quad 2n = M - N, \quad 2p = P + Q, \quad 2q = P - Q,$$

la suivante:

$$M^2 - N^2 = P^2 - Q^2,$$

ou

$$M^2 + Q^2 = N^2 + P^2.$$

Ainsi, en prenant, $m = u^3 + v^3$, $n = 1$, $p = u + v$, $q = u^2 - uv + v^2$,

on a

$$M = u^3 + v^3 + 1, \quad N = u^3 + v^3 - 1,$$

$$P = u^2 - uv + v^2 + u + v, \quad Q = u^2 - uv + v^2 - u - v,$$

et

$$(u^3 + v^3 + 1)^2 + (u^2 - uv + v^2 - u - v)^2 = (u^3 + v^3 - 1)^2 + (u^2 - uv + v^2 + u + v)^2.$$

Posons $v = 1$, il vient:

$$\boxed{(u^3 + 2)^2 + (u^2 - 2u)^2 = (u^2 + 2)^2 + u^6}$$

Exemples numériques:

$u = 3$: $29^2 + 3^2 = 11^2 + 3^6$ $(= 850)$

$u = 5$: $127^2 + 15^2 = 27^2 + 5^6$ $(= 16{,}354)$

$u = 7$: $345^2 + 35^2 = 51^2 + 7^6$ $(= 120.250)$.

II. On obtient, par un procédé analoque, les identités

$$(u^5 + v^5 + 1)^2 + (u^4 - u^3 v + u^2 v^2 - uv^3 + v^4 - u - v)^2 = (u^5 + v^5 - 1)^2 + (u^4 - u^3 v + u^2 v^2 - uv^3 + v^4 + u + v)^2,$$

et, en posant $v = 1$,

$$\boxed{(u^5 + 2)^2 + (u^4 - u^3 + u^2 - 2u)^2 = u^{10} + (u^4 - u^3 + u^2 + 2)^2}$$

Exemples:

$u = 3$: $245^3 + 57^2 = 3^{10} + 65^2$ $(= 63.274)$

$u = 5$: $3127^2 + 515^2 = 5^{10} + 527^2$ $(= 10.043.354)$

$u = 7$: $16809^2 + 2093^2 = 7^{10} + 2109^2$ $(= 286.923.130)$.

III. En partant de l'identité

$$u^k + v^k = (u + v)(u^{k-1} - u^{k-2} v + \cdots + v^{k-1}),$$

k impair, on trouve:

$$(u^k + v^k + 1)^2 + (u^{k-1} - u^{k-2} v + \cdots + v^{k-1} - u - v)^2 = (u^k + v^k - 1)^2 + (u^{k-1} - u^{k-2} v + \cdots + v^{k-1} + u + v)^2,$$

et, en posant, $v = 1$,

$$\boxed{(u^k + 2)^2 + (u^{k-1} - u^{k-2} + \cdots - 2u)^2 = u^{2k} + (u^{k-1} - u^{k-2} + \cdots + u^2 + 2)^2.}$$

Considérons encore le cas de $k = 7$.

$$(u^7 + 2)^2 + (u^6 - u^5 + u^4 - u^3 + u^2 - 2u)^2 = u^{14} + (u^6 - u^5 + u^4 - u^3 + u^2 + 2)^2.$$

Exemple:

$u = 3$: $2189^2 + 543^2 = 3^{14} + 551^2$ $(= 5.086.570)$.

IV. On peut aussi prendre pour point de départ l'identité:

$$(mp + nq)^2 + (mq - np)^2 = (mp - nq)^2 + (mq + np)^2,$$

et prendre, par exemple, $mp - nq = u^l$, l étant un entier quelconque.

Exemple.

$$u^l = 3^3 = 27.$$

Avec

$$m = 7, \quad n = 1, \quad p = 4, \quad q = 1,$$

on retrouve l'identité:

$$29^2 + 3^2 = 3^6 + 11^2.$$

Si l'on se propose de décomposer 3^6+11^2 en une somme de 2 carrés de toutes les façons possibles, on trouve

$$3^6+11^2=29^2+3^2=15^2+25^2.$$

Le nombre de décompositions en une somme de deux carrés d'un nombre de la forme $a^\alpha b^\beta$, a et b étant de la forme $4c+1$, est

$$\frac{1}{2}(\alpha+1)(\beta+1)+\frac{1}{2}, \quad \text{ou} \quad \frac{1}{2}(\alpha+1)(\beta+1),$$

selon que $a^\alpha b^\beta$ est un carré parfait ou non.

L'application de ce théorème nous donne pour le nombre

$$3^6+11^2=850=2.5^2.17, \quad \frac{(2+1)(1+1)}{2}=3$$

décompositions, comme nous l'avons trouvé plus haut.

A. GLODEN

23. — *Sur un triangle particulier.*

Il s'agit du triangle ABC dans lequel les côtés $BC=a$, $CA=b$, $AB=c$ vérifient la relation[1]

$$5(a^2+b^2+c^2)=6(bc+ca+ab).$$

Si l'on pose

$$x=u^2+v^2, \quad y=u^2-v^2, \quad z=2uv,$$

on a

$$x^2=y^2+z^2$$

et les côtés du triangle considéré ont pour expressions, *en nombres entiers*,

$$a=2\lambda(u^2+v^2), \quad b=\lambda(5u^2+2uv+v^2),$$
$$c=\lambda(5u^2-2uv+v^2),$$

u et v étant des nombres premiers entre eux et de parités différentes et λ un nombre entier quelconque,

Il résulte de ces formules que

$$p=2\lambda(3u^2+v^2), \qquad p-a=4\lambda u^2,$$
$$p-b=\lambda(u-v)^2, \qquad p-c=\lambda(u+v)^2,$$

puis, que, avec les notations habituelles,

$$rr_a=(p-b)(p-c)=[\lambda(u^2-v^2)]^2,$$
$$rr_b=(p-c)(p-a)=[2\lambda u(u+v)]^2,$$
$$rr_c=(p-a)(p-b)=[2\lambda u(u-v)]^2,$$

et enfin que

$$p^2=[2\lambda(3u^2+v^2)]^2=\Sigma 4(p-b)(p-c)=$$
$$4r(r_a+r_b+r_c)=4r(4R+r)=$$
$$[2\lambda(u^2-v^2)]^2+[4\lambda u(u+v)]^2+[4\lambda u(u-v)]^2;$$

antrement dit, *le carré du demi-périmètre du triangle considéré peut être décomposé en une somme de trois carrés entiers.*

V. THÉBAULT
(LE MANS, FRANCE)

[1] Cfr. *Errera, Mathesis*, 1924—408; *V. Thébault, L'enseignement mathématique*, 1937—227.

CHESTIUNI DE EXAMEN ŞCOALA POLITECHNICĂ DIN TIMIŞOARA.

Luni, 25 Octomvrie 1937.

Lucrare scrisă la „GEOMETRIE".

Se dă un plan P, un cerc O de rază dată R în acest plan şi un segment AB, de lungime $2a$, exterior planului P.

a) Să se găsească pe cercul O punctele care sunt egal depărtate de capatele segmentului AB. Discuţiune.

b) Să se găsească pe cercul O punctele M pentru care raportul $\frac{MA}{MB}$ are o valoare dată $\frac{m}{n}$. Discuţie.

c) Să se găsească cel mai lung şi cel mai scurt drum dela A la B care atinge planul P într'un punct al cercului O, când proecţiunea ab a segmentului AB pe planul P este exterioară cercului O, iar dreapta ab trece prin centrul O. Discuţiune.

d) Să se ducă prin dreapta AB un plan, care să dea în cercul O o coarda cea mai mai mare.

e) Să se ducă prin dreapta AB un plan, care să dea în cercul O o coardă CD, de lungime dată l. Discuţiune.

f) Dacă M şi N sunt două puncte ale cercului O, diametral opuse şi egal depărtate fiecare de capetele segmentului AB, să se afle volumul tetraedului MNBA, ştiind încă, că proecţiunea ab, a segmentului AB pe planul P este egală cu jumătatea lui AB şi distanţa mijlocului I al segmentului AB la planul P este egală cu AB, iar la centrul O cât îndoitul lui AB.

(Timp acordat, 8—11)

Lucrare scrisă la „ALGEBRĂ şi TRIGONOMETRIE"

I.

1. Să se formeze ecuaţia de gradul al 2-lea ale cărei rădăcini x' şi x'' satisfac relaţiile următoare:

$$4x'x''-5(x'+x'')+4=0,$$
$$(x'-1)(x''-1)=\frac{1}{1+a},$$

a însemnând un număr presupus cunoscut.

2. Să se determine a astfel ca suma patratelor rădăcinilor ecuaţiei formate să fie egală cu 11.

3. Să se verifice calculând rădăcinile.

II.

Să se studieze variaţiunea funcţiunii,

$$y = L\sqrt{1+x^2} + 8 \operatorname{arc\,tg} x + \frac{5(2x+1)}{x^2+1} + C.$$

Să se determine constanta C astfel ca maximul funcţiunii date să fie: $5 + L\sqrt{5}$.

III.

Intr'un triunghiu dreptunghic se cunoaşte perimetru $2p$ şi suprafaţa a^2. Se cere:

1. Să se rezolve triunghiul.

2. Discuţiune asupra valorilor lui p şi a pentru ca problema să admită o soluţie.

3. Să se afle laturile pentru $2p = 2$ şi $a^2 = 6$.

(Timp acordat, 3—6)

Marţi, 26 Octomvrie 1937.

Lucrare scrisă la „ARITMETICA".

I.

In timpul unei manevre trei ţărani au găzduit soldaţi şi au îngrijit de caii lor. Primului ţăran i s'au dat 8 soldaţi şi 5 cai, la al doilea 10 soldaţi şi 7 cai, iar ultimului 9 soldaţi şi 3 cai.

Ei au fost găzduiţi şi îngrijiţi respectiv 10, 9, 8 zile.

La plecare li s'a dat celor trei ţărani la un loc, suma de 1476 lei.

1. Cât se cuvine fiecăruia ştiind că întreţinerea a 2 soldaţi în 3 zile costă cât aceia a 3 cai în 7 zile.

2. Câţi cai trebuia să se ia dela al doilea ţăran şi să se dea ultimului pentru ca ambii să primească, la sfârşit sume egale?

II.

Un capital, dat cu dobândă simplă, devine în 8 luni 10.400 lei. Această sumă produce în 7 luni o dobândă de 364 lei. Se cere:

1. Procentul cu care s'au plasat capitalurile;

2. Capitalul iniţial.

III.

Un număr împărţit prin 8 dă restul 7, împărţit prin 9 dă restul 2, iar împărţit prin 11 dă restul 3.

1. Să se găsească toate numerele, cari îndeplinesc aceste condiţiuni.

2. Care din ele este cel mai mic?

(Timp acordat, $8^1/_2$—11).

BIBLIOGRAFIE

1. *Gazeta Matematică.* Anul XLIII, No. 3, Noemvrie 1937. Consideraţii invariant-teoretice asupra patrulaterului (urmare), de *D. Barbelian.* Aritmetica al lui *Gheorghe Asachi* (va urma), de *P. Cazanacli.* Al 2-lea Congres Interbalcanic al Matemacienilor, de *Preduţa D. Bungeţeanu.* Programa analitică hotărâtă pentru concursul *„Gazetei Matematice"* din anul 1938. Raport pentru premiul *Vasile Conta* pe anul 1937, de *P. Sergescu, Gh. Zapan* şi *D. Stan.* Note matematice. Chestiuni de examen. Bibliografie. Cereri. Diverse. Probleme rezolvate Exerciţii. Probleme propuse.

2. *Boletin Matematico,* Anul X, No. 5, Octomvrie 1937, *Buenos Aires.* Asupra triunghiurilor pitagorice (continuare), de *R. Noguera.* Informaţii bibliografice. Probleme rezolvate şi propuse.

3. *Boletin Matematico,* Anul X, No. 6, Octomvrie 1937, Buenos Aires. O reamintire a parantezelor de ordin superior, de *B. I. Baidaff.* Asupra unei integrale duble, de *V. Claudian.* Asupra sistemului diofantian, B. M. 1937, p. 21, de *A. Gloden.* Probleme rezolvate şi propuse.

4. *Stiinţă şi Progres,* Revista ştiinţifică a liceelor Militare, anul IV, No 6, Noemvrie 1937. Câteva demonstraţii geometrice pentru formule de trigonometrie, de *N. N. Mihăileanu.* Sborul peste Polul Nord, de elev *Centea Zeno.* Publicaţii noui. Probleme rezolvate şi propuse.

5. *Gazeta Matematică, Supliment cu exerciţii,* anul IV, No. 3, Decemvrie 1937.

6. *Revista Cercului de Studii şi a Asociaţiei absolvenţilor Şcoalei Superioare P. T. T., Timişoara,* anul VI, N-rile 9—10—11, 1937. Conţine articole de specialitate.

7. *Crezul Nostru,* Revistă de cultură generală a liceului comercial *„Spiru Haret"*, Piatra Neamţ, An. I, No. 2, Noemvrie 1937.

8. *P. Sergescu.* Remarques pratiques sur l'intégration de certaines équations différentielles linéaires. (Extracto de la Revista de Ciencias, Lima-Peru, 1937).

9. *P. Sergescu.* Le développement des Sciences Mathématiques en Roumanie, Bucarest 1937.

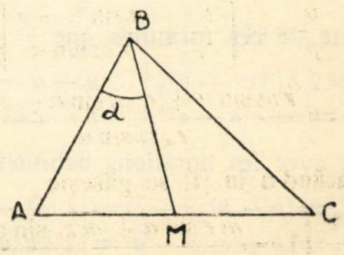
10. *M. Ghermănescu.* Sur une classe nouvelle de noyaux de *Fredholm.* (Extrait des Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences, 1937).

PROBLEME REZOLVATE

462. — *Să se rezolve un triunghiu oare-care* A B C *cunoscându-se mediana m ce pleacă din vârful* B, *unghiul format de aceasta cu latura* A B, *raza cercului înscris r şi raza cercului exînscris la latura* B C.

I. CHIRILA

Fiind date razele r şi r_a a două cercuri tritangente, va trebui să căutăm a folosi relaţiuni în care intră aceste raze.



Fie α unghiul A B M, M mijlocul laturei B C şi r_b, r_c, S, p, etc. notaţiunile obişnuite. Se cunosc următoarele relaţiuni:

$S = pr$; $r_a = \frac{pr}{p-a}$; $r_b = \frac{pr}{p-b}$; $r_c = \frac{pr}{p-c}$

$$a^2 = (r_a - r)(r_b + r_c).$$

Din aceste formule se scoate

(1) $$\frac{1}{r_b} = \frac{1}{r}\left(1 - \frac{b}{p}\right),$$

(2) $$\frac{1}{r_c} = \frac{1}{r}\left(1 - \frac{c}{r}\right).$$

Triunghiul A B M dă

$$\frac{m}{\sin A} = \frac{b}{2\sin\alpha}$$

$$2m\sin\alpha = b\sin A = 2b\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}.$$

Dar

$$\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2} = \frac{S}{bc} = \frac{pr}{bc}.$$

Deci

(3) $$m\sin\alpha = \frac{pr}{c}.$$

(4) $$\frac{p}{c} = \frac{m\sin\alpha}{r}.$$

Ducând (4) în (2) şi făcând calculele, avem

$$\frac{1}{r_c} = \frac{1}{r}\left[1 - \frac{r}{m\sin\alpha}\right] = \frac{m\sin\alpha - r}{r\,m\sin\alpha}.$$

Din (2) şi valoarea lui r_a se scoate

$$\frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_c} = \frac{b}{pr}$$

$$\frac{b}{p} = r\left[\frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_c}\right]$$

şi ţinând seamă de (5)

$$\frac{b}{p} = r\left[\frac{1}{r_a} + \frac{m\sin\alpha - r}{r\,m\sin\alpha}\right]$$

$$\frac{b}{p} = \frac{r\,m\sin\alpha + r_a\,m\sin\alpha - r\,r_a}{r_a\,m\sin\alpha}$$

pe care ducând-o în (1) se găseşte

$$\frac{1}{r_b} = \frac{1}{r}\left[1 - \frac{m\,r\sin\alpha + m\,r_a\sin\alpha - r\,r_a}{m\,r_a\sin\alpha}\right]$$

(6) $$\frac{1}{r_b} = \frac{r_a - m\sin\alpha}{m\,r_a\sin\alpha}.$$

Din (5) şi (6) se scot valorile lui r_c şi r_b, care se duc în

$$a^2 = (r_a - r)(r_b + r_c)$$

şi se găseşte a. Apoi din

$$b^2 = (r_b - r)(r_c + r_a)$$

$$c^2 = (r_c - r)(r_a + r_b)$$

se calculează b şi c. Cu acestea triunghiul este complect rezolvat.

Ca problema să fie posibilă trebue ca

$$r_a - r > 0$$

$$r_b - r > 0 \quad \overset{*}{*}\overset{*}{*} \quad \frac{m\,r_a\sin\alpha}{r_a - m\sin\alpha} > r,$$

$$r_c - r > 0 \quad \overset{*}{*}\overset{*}{*} \quad \frac{m\sin\alpha}{m\sin\alpha - r} > 1,$$

ultima neegalitate fiind totdeauna posibilă, dacă

$$m\sin\alpha - r > 0.$$

S a primit o bună soluţie dela d-l *Vasilescu B.* (lic. Sf. Sava, Bucureşti).

953 — *In triunghiul* A B C *se cere să se ducă o dreaptă paralelă cu latura* B C, *aşa că dacă* P *şi* Q *sunt punctele ei de intersecţie cu laturile* A B şi A C *să existe relaţia*

$$BC + PQ = BP + QC.$$

Dacă se duc în aceleaşi condiţiuni paralele laturile A C *şi* A B *se obţin pe* B A *şi* A C *punctele* U *şi* T, *iar pe* C A *şi* C B *punctele* R *şi* S. *Să se arate că:*

1°. *Dreptele* P S, Q T *şi* R U *sunt concurente*

2°. *Cercurile de diametru* B P *şi* Q C *şi analoagele lor sunt tangente.*

3°. $PQ = TS$; $QR = TU$; $SS = PU$.

4°. *Exagonul* P Q R S T U este circumsriptibil.

AUGUST COMAN

Se ştie (a se vedea de ex. *Exercices de Géométrie F. G. M.* septième edition pag. 316) că dacă într'un patrulater B P Q C există relaţia

(1) $$BC + PQ = BP + QC$$

atunci patrulaterul este circumsriptibil unui cerc. In cazul de faţă patrulaterul este circumscris cercului I, înscris triunghiului A B C.

Prin urmare P Q se obţine ducând cercului I o paralelă cu B C.

Se poate verifica prin calcul această proprietate.

Fie l_a lungimea tangentei la I paralelă la B C şi limitată la A B, A C. Se observă că:

$$\frac{l_a}{a}=\frac{h_a-2r}{h_a}=\frac{a h_a-2ar}{a h_a}=\frac{S-ar}{S}$$

$$\frac{l_a}{a}=\frac{pr-ar}{pr}=\frac{p-a}{p}$$

$$l_a=\frac{a(p-a)}{p}.$$

Dacă acum se notează cu x lungimea lui P Q, construită în condiţiunile problemei, atunci se observă pe o figură că

$$\frac{x}{a}=\frac{c-BP}{c}, \qquad \frac{x}{a}=\frac{b-QC}{b}$$

$$BP=c-\frac{cx}{a}, \qquad QC=b-\frac{bx}{a},$$

care introduse în (1) dau

$$x=c-\frac{cx}{a}+b-\frac{bx}{a}-a$$

$$x=\frac{a(p-a)}{p}$$

adică tocmai valoarea lui l_a.

Analog dreptele U T şi R S sunt tangente la I şi sunt paralele respectiv cu A C şi A B.

1°. Din proprietatea demonstrată până aici, rezultă că exagonul P Q R S T U P este circumscris cercului I, ceia ce demonstrează şi punctul 4° al problemei.

Dreptele P S, Q T, R U unind vârfuri opuse într'un exagon circumscris la un cerc, sunt concurente în punctul lui *Brianchon*.

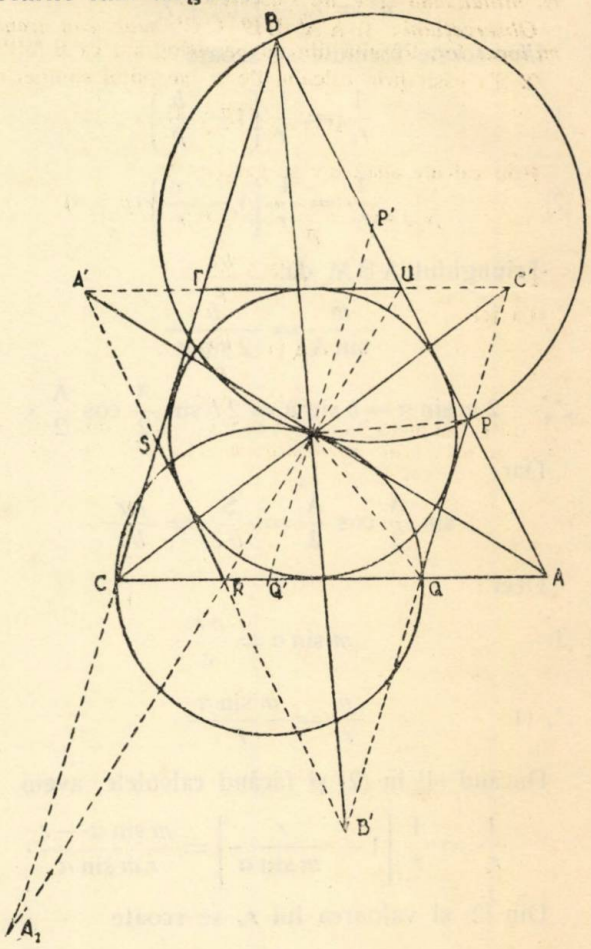
2°. Fie P', Q' mijloacele segmentelor B P, C Q. In trapezul B P Q C avem

$$P'Q'=\frac{PQ+BC}{2},$$

sau ţinând seamă de (1)

$$P'Q'=\frac{BP+CQ}{2}=P'B+Q'C.$$

Distanţa P' Q' a centrelor cercurilor de diametre B P, C Q fiind astfel egală cu suma razelor, cercurile sunt tangente.



3°. Fie A', B', C' triunghiul format de P Q, R S, T U prelungite. Triunghiurile A B C, A' B' C' având laturile paralele şi fiind circumscrise aceluiaşi cerc I sunt egale. De asemeni triunghiurile A P Q, A' S T sunt egale, căci

$$A'B'=AB \quad \text{şi} \quad SB'=BP$$

ca laturi opuse în paralelogramele A' B' A B şi S B' P B. Se deduce

$$A'B'-SB'=AB-BP=A'S=PA.$$

La fel se arată că

$$A'T=AQ$$

şi deci triunghiurile A P Q, A' S T sunt egale şi

$$PQ=TS.$$

Se demonstrează analog că

$$QR=TU \quad \text{şi} \quad UP=RS.$$

4°. S'a demonstrat la 1°.

Soluții analoage s'au primit de la d-nii *C. Ivănescu*, *N. N. Mihăileanu* și *V. M. Păsculescu*.

Observațiuni: 1. A A' B B' C C' *sunt concurente în mijlocul lor.* Rezultă din un paralelogram ca B A B' A'.

2. S'a găsit prin calculul de la începutul soluției că

$$PQ = \frac{a(p-a)}{p}$$

Prin calcule analoage se găsește

$$AQ = \frac{b(p-a)}{p}, \quad QR = \frac{b(p-b)}{p}$$

$$\overset{*}{**} \qquad AR = \frac{bc}{p}$$

La fel

$$AU = \frac{bc}{p}$$

$$\overset{*}{**} \qquad AR = AU$$

și deci paralelogramul A R A' U este romb de unde: A A' *și* R U *sunt perpendiculare în mijlocul lor și* A A' *este bisectoarea lui* A.

3. Din 2) rezultă că A A', B B', C C' *tae prin centrul* I *al cercului înscris.*

4. Proprietatea 3° din enunțul problemei se poate demonstra și în felul următor: Fie I centrul cercului înscris. Dreptele Q I și C I sunt evident bisectoarele unghiurilor P Q C și Q C B care sunt suplimentare, urmează că jumătățile lor I Q C și I C Q au ca sumă 90° și prin urmare Q I C este drept. *Cercul de diametru* Q C *trece prin* I. Apoi dacă Q' este mijlocul lui Q C, în triunghiul dreptunghic C I Q triunghiul I Q' C este isoscel. Deci

$$\sphericalangle Q'IC = \sphericalangle Q'CI = \sphericalangle ICB,$$

deci Q' I este paralelă cu B C. La fel P' I este paralelă cu B C și atunci: cercurile de diametre Q C, B P trec prin I și sunt tangente între ele.

5. U R, T Q, S P fiind perpendiculare în I pe bisectoare, întâlnesc laturile triunghiului A B C în trei puncte coliniare $A_1, B_1, C_1,$.

Figura se bucură de alte numeroase proprietăți ușor de demonstrat.

1467. — *Se dă un con drept de sticlă, gol, cu raza bazei R și înălțimea I. Se toarnă apă printr'o deschidere, care se poate apoi închide și se observă înălțimea la care s'a urcat apa, conul fiind asezat cu baza pe o masă orizontală. Se întoarce apoi conul cu vârful în jos și astfel ca baza să fie tot orizontală și se observă că înălțimea la care s'a urcat apa este, de data aceasta, dublă ca în primul caz. Să se afle volumul ocupat de apă.*

V. Alaci

In primul caz, apa din conul de sticlă ocupă un volum în formă de trunchiu de con. Notez cu r raza cercului de bază mică și cu i înălțimea la care s'a ridicat apa. Volumul V_t a trunchiului de con este:

$$(1) \qquad V_t = \frac{\pi i}{3}(R^2 + r^2 + Rr).$$

In al 2-lea caz, apa din conul de sticlă ocupă un volum în formă de con. Notez cu r_1 raza bazei acestui con și V_c volumul său, avem:

$$(2) \qquad V_c = \frac{\pi . 2 i r_1^2}{3}.$$

Conform enunțului $V_t = V_c$, deci

$$\frac{\pi i}{3}(R^2 + r^2 + Rr) = \frac{2\pi i r_1^2}{3},$$

sau simplificând, găsim:

$$2r_1^2 = R^2 + r^2 + Rr,$$

unde r și r_1 sunt necunoscute.

Pe de altă parte, într'un con circular drept, razele secțiunilor paralele cu baza sunt proporționale cu înălțimele corespunzătoare, deci putem scri:

$$\frac{r}{R} = \frac{I-i}{I} \quad \text{și} \quad \frac{r_1}{R} = \frac{2i}{I}.$$

De aci scoatem:

$$(4) \qquad r = \frac{R(I-i)}{I} \quad \text{și} \quad r_1 = \frac{2Ri}{I}.$$

Aceste valori ale lui r și r_1 le înlocuim în relația (3) și obținem:

$$\frac{8R^2 i^2}{I^2} = R^2 + \frac{R^2(I-i)^2}{I^2} + \frac{R^2(I-i)}{I}.$$

Simplificând cu $\frac{R^2}{I^2}$, găsim:

$$8i^2 = I^2 + (I-i)^2 + I(I-i)$$

$$\overset{*}{**} \qquad 7i^2 + 3Ii - 3I^2 = 0.$$

Rezolvind această ecuație în raport cu i și luând soluția convenabilă, avem:

$$(5) \qquad i = \frac{-3I + \sqrt{9I^2 + 84I^2}}{14} = \frac{I}{14}(\sqrt{93} - 3).$$

Inlocuind această valoare în a 2-a relație din (4), găsim:

$$(6) \qquad r_1 = \frac{R(\sqrt{93} - 3)}{7}.$$

Valorile lui i și r, date de relațiile (5) și (6) le înlocum în (2) și obținem:

$$V_c = \frac{2\pi}{3} \cdot \frac{I}{14} \cdot (\sqrt{93} - 3) \cdot \frac{R^2(\sqrt{93}-3)^2}{49},$$

sau:

$$V_c = \frac{\pi I R^2}{3} \cdot \left(\frac{\sqrt{93}-3}{7}\right)^3 = \frac{\pi I R^2 (5\sqrt{93} - 36)}{343}.$$

Am găsit astfel volumul cerut, în funcţie de raza cercului de bază şi înălţimea I a conului de sticlă dat, cunoscute.

Soluţii date de d-rele: *Comloşan Cornelia* (studentă, Cluj), *Savin Mărioara* (Iaşi) şi de d-nii: *Amărăşteanu F. Marcel* (Craiova), *Anastasescu M. Mihail* (bacalaureat, Ploeşti), *Anastasiu M Mihail*, *Apostol Radu*, *Berinde L. Titus* (lic. Lugoj), *Cioc I. D-tru* (lic. Milit., Craiova), *Czirjac Vasile* (lic. Bistriţa), *Dăscălescu Hristache* (Focşani), *Florescu L. Victor* (lic. Milit.. N. Filipescu), *Kornis Ernest* (lic. Loga), *Lăzărescu Stelian* (lic. Milit., N. Filipescu), *Lupescu Gh. Corneliu* (Şc. de Of. de Artilerie), *Matei D. D-tru* (lic. Internat, Iaşi), *Medeleanu Ion* (Lugoj, *Murgu Marţian* (lic. Beiuş), *Negrea A. Leonte-Mircea* (Brăila), *Negulescu D. Ştefan* (lic. Milit., N. Filipescu), *Olaru Eugen* (Abrud), *Păduraţ A. Vasile* (lic. Milit, Chişinău), *Popoviciu I. Gavril*, *Radu D-tru* (lic. Arad), *Rădulescu Gh. Octavian* (lic. Milit., N. Filipescu), *Ripianu Andrei* (lic. Braşov), *Rosenthal Tiberiu* (lic. Dej), *Segal Zigu* (lic. Vaslui), *Ştefănescu D. Nicolae* (lic. Milit., N. Filipescu), *Ştefan C. Tilică* (lic. T-Severin), *Viciu A. Aurel* (Tg-Mureş), *Vlad I. C. M.* (Sub Lt) şi *Zagaican Ilie* (Conductor de L. P. Leova).

1477. — *Să se discute sistemul:*

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ px + qy + rz = a \\ p^2x + q^2y + r^2z = a^2, \end{cases}$$

p, q, r şi a fiind nişte parametri variabili.

EUGEN VISA

Rezolvind sistemul dat după regula lui *Cramer*, avem:

$$(1) \qquad x = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad y = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \quad z = \frac{\Delta_3}{\Delta},$$

unde:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ p & q & r \\ p^2 & q^2 & r^2 \end{vmatrix}, \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & q & r \\ a^2 & q^2 & r^2 \end{vmatrix},$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ p & a & r \\ q & a^2 & r^2 \end{vmatrix}, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ p & q & a \\ p^2 & q^2 & a^2 \end{vmatrix}.$$

Având nişte determinanţi *Vandermonde*, mai putem scri:

$$\Delta = (p-q)(q-r)(r-p), \quad \Delta_1 = (a-q)(q-r)(r-a),$$

$$\Delta_2 = (p-a)(a-r)(r-p), \quad \Delta_3 = (p-q)(q-a)(a-p).$$

Discuţie. *Cazul 1.* Dacă $p \neq q \neq r$, atunci $\Delta \neq 0$ şi sistemul de soluţii (1) a sistemului dat simplificat, este:

$$(2) \qquad x = \frac{(a-q)(r-a)}{(a-q)(r-p)}, \quad y = \frac{(p-a)(a-r)}{(a-q)(q-r)},$$

$$z = \frac{(q-a)(a-p)}{(q-r)(r-p)}.$$

In acest caz, *sistemul dat este compatibil şi determinat,* admiţând sistemul de soluţii (2).

Cazul al 2-lea. Presupunem $a \neq q$ şi $q = r$.

In acest caz, $\Delta = 0$, iar minorul,

$$\delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ p & q \end{vmatrix} = q - p \neq 0.$$

Pentru ca sistemul dat să fie compatibil, trebuie ca determinantul caracteristic corespunzător,

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ p & q & a \\ q & q^2 & a^2 \end{vmatrix} = (p-q)(q-a)(a-p),$$

să fie nul, adică:

$$(p-q)(q-a)(a-p) = 0.$$

Aceasta relaţie este satisfăcută numai pentru $a = p$, sau $a = q$, căci ştim că $p - q \neq 0$.

Rezultă de aci.

a. Dacă $p \neq q = r$ şi $a = p$, sau $a = q$, atunci *sistemul dat este compatibil, dar nedeterminat.* In acest caz primele două ecuaţii a sistemului dat ne dau:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1-z & 1 \\ a-qz & q \end{vmatrix}}{q-p} = \frac{q-a}{q-p},$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1-z \\ p & a-qz \end{vmatrix}}{q-p} = \frac{a-p}{q-p} - z,$$

in care trebuie să facem $p = a$, sau $q = a$ şi obţinem respectiv:

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = -z \end{cases} \quad \text{sau,} \quad \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 - z. \end{cases}$$

b. Dacă $p \neq q = r$, însă $a \neq p$ şi $a \neq q$, determinantul caracteristic $D \neq 0$ şi deci *sistemul dat este incompatibil.*

Cazul al 3-lea. Presupunem $q \neq p = r$.

Determinantul sistemului este iarăşi nul. Condiţia de compatibilitate este aceiaşi ca şi în cazul al 2-lea şi dacă $a = p$, sau $a = q$, avem sistemele de soluţii respective,

$$\begin{cases} y = 1 \\ x = -z \end{cases} \quad \text{sau,} \quad \begin{cases} y = 0 \\ x = 1 - z, \end{cases}$$

iar dacă $a \neq p$ şi $a \neq q$, atunci *sistemul dat este incompatibil*, căci $D \neq 0$.

Cazul al 4-lea. Presupun $r \neq p = q$.

Determinantul sistemului Δ este nul precum nul este şi determinantul caracteristic D pe care l'am întâlnit în cazul al 2-lea, deci *sistemul dat este compatibil, dar nedeterminat.*

In acest caz, avem sistemul de soluţii ce se obţine rezolvind primele două ecuaţii:

$$\begin{cases} z = \dfrac{p - a}{p - r} \\ z = \dfrac{a - r}{p - r} - y. \end{cases}$$

Cazul al 5-lea. Presupunem $p = q = r$.

In acest caz, determinantul sistemului este nul şi toţi minorii lui de primul ordin sunt nuli. Dar coeficienţii necunoscutelor nu sunt nuli. Vom considera coeficientul z din prima ecuaţie.

Determinanţii caracteristici corespunzători sunt:

$$\delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ r & a \end{vmatrix} = a - r, \qquad \delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ r^2 & a^2 \end{vmatrix} = a^2 - r^2.$$

Pentru compatibilitate trebue ca ambii aceşti determinanţi să fie nuli. Pentru aceasta trebue ca $a = r$.

Rezultă de aci:

a. Dacă $a = p = q = r$, *sistemul dat este compatibil şi ned terminat de ordinul al 2-lea.* Soluţia este:

$$z = 1 - x - y.$$

b. Dacă $a \neq p = q \neq r$, *sistemul dat este incompatibil.*

Soluţii date de d-nii: *Amărăsteanu F. Marcel* (bacalaureat, Craiova), *Andrunachievici Vladimir* (Chişinău), *Anton C. George* (lic. Bistriţa), *Begu I. Stefan* (Şc. Polit, Bucureşti), *Cazanacli P.* (Chişinău), *Dăscălescu Şt. Hristache* (Focşani), *Lupescu Gh. Corneliu* (Şc. Ofiţeri de Artilerie), *Popoviciu I. Gavril* (student, Bucureşti), *Ripianu Andrei*, *Stefănescu D. Nicolae* (lic. Milit., N. Filipescu), *Solomon Isac* (lic. Internat, Iaşi), *Tilică C Ştefan* (lic. T-Severin) şi *Vlad C. I. Mihai* (Sub-Lt)

Observare. D-l *Cazanacli P.* (Chişinău), observă că problema propusă, însă cu alte notaţii, se găseşte în „*Culegere de Probleme*“ Algebra, Cap. XXIX, 4 şi de care autorul de sigur n'a avut cunostinţă.

1481. — *In ce sistem de numeraţie un număr de patru cifre de forma a a b b poate să fie patratul numărului de două cifre c c, fiind dat că a şi b trebuesc să fie de aceiaşi paritate, consecutive.*

V. THÉBAULT

Soluţia autorului. Egalităţile, $N = a\,a\,b\,b = (cc)^2$ cum a dovedit autorul problemei în nota matematică „*Remarques des carrés curieux*“ din „R. M. T“, anul XVI. p. 55, conduc la relaţiile:

(1) $c^2 = (a-1)^2 + ab$, (2) $B = a + b - 1$,

B fiind baza sistemului de numeraţie căutat.

Prin ipoteză, trebuie să avem:

$$b = a - 2 \qquad \text{sau} \qquad b = a + 2.$$

1°. $b = a - 2$. In acest caz relaţiile (2) şi (1) devin:

$$B = a + a - 2 - 1 = 2a - 3$$

$$c^2 = (a-1)^2 + a(a-2) = 2a^2 - 4a + 1$$

şi rezultă că:

$$2(c^2 + 1) = 4a^2 - 8a + 4 = (B+1)^2,$$

de unde obţinem ecuaţia lui *Lagrange:*

$$(B+1)^2 - 2c^2 = 2.$$

Rezolvirea acestei ecuaţii dă pentru primele soluţiuni, $(B > 1)$,

$$B + 1 = 10,\ 58,\ 338, \ldots$$

$$c = 7,\ 41,\ 239, \ldots,$$

de unde se scoate succesiv:

$a = 6,\ b = 4,\ N = 6644 = 77^2,\ B = 9.$

$$a = \overline{30},\ b = \overline{28},$$

$$N = \overline{30}\,\overline{30}\,\overline{28}\,\overline{28} = (\overline{41}\,\overline{41})^2,\quad B = 57.$$

$$a = 170,\quad b = \overline{168},$$

$$N = \overline{170}\,\overline{170}\,\overline{168}\,\overline{168} = (\overline{239}\,\overline{239})^2,\quad B = 337.$$

. . . . . .

2°. $b = a + 2$. In această ipoteză,

$$B = a + a + 2 - 1 = 2a + 1,$$

$$c^2 = (a-1)^2 + a(a+2) = 2a^2 + 1,$$

de unde ecuaţia lui *Fermat*

$$c^2 - 2a^2 = 1,$$

ale cărei soluţiuni acceptabile dau:

$c=3,\ a=2,\ b=4,\quad N=2244=(33)^2,\quad B=5.$

$c=\overline{17},\ a=\overline{12},\ b=\overline{14},\ N=\overline{12}\,\overline{12}\,\overline{14}\,\overline{14}=(\overline{17}\,\overline{17})^2\ B=25.$

$c=\overline{99},\ a=\overline{70},\ b=\overline{72},\ N=\overline{70}\,\overline{70}\,\overline{72}\,\overline{72}=(\overline{99}\,\overline{99})^2\ B=141.$

. . . . . .

Soluţii date de d-nii: *Amărăsteanu F. Marcel*, a dat soluţia cu baza 5; *Cazanacli V. Petre*, a găsit soluţiile cu bazele 25 şi 141; *Matei D. D-tru*, a dat soluţiile cu bazele 5 şi 9; *Negrea A. Leonte-Mircea*, a dat soluţiile cu bazele 5 şi 9 şi *Tilică C. Ştefan*, a găsit soluţia cu baza 9.

PROBLEME PROPUSE

1633. — Să se afle cubul perfect la care adunându-se de 112 ori rădăcina sa cubică să se obţină tot un cub perfect.

C-TIN JIDANU

1634. — Să se găsească două numere întregi astfel că dacă pe primul îl mărim c'un procent egal cu al doilea, iar pe al doilea îl micşorăm cu un procent egal cu primul, găsim două rezultate egale.

ION C. SCHILERU DILI

1635. — Să se rezolve ecuaţia:

$$\sqrt{1 + a\,i}\,(1 - x\,i)^6 = \sqrt{1 - a\,i}\,(1 + x\,i)^6,$$

unde $i = \sqrt{-1}$. Generalizare.

D-TRU MATEI

1636. — Să se determine numerile x şi y astfel că, a fiind un întreg dat oarecare, ele să verifice ecuaţiile:

$$\begin{cases} x + a\,y = u^2 \\ x^2 + a\,y^2 = v^2, \end{cases}$$

toate necunoscutele trebuind să fie numere întregi.

1637. — Să se construiaccă un triunghiu echilateral, care să aibă vârfurile pe două cercuri concentrice date.

G-L GH. BUICLIU

1638. — Fie A B C D un romb. Unindu-se mijlocul P al laturei A B, cu vârfurile C şi D se obţine un triunghiu P C D. Unind mijloacele laturilor P C şi P D se obţine triunghiul P M N. Să se arate că:

$$\text{aria}\,(A\,B\,C\,D) = 8\ \text{aria}\,(P\,M\,N).$$

LT MIHAI C I. VLAD

1639. — Dacă,

$$u^2 + v^2 = 2,\quad \frac{v}{u} = \operatorname{tg}(x + 45^0),\quad w = \cos x \operatorname{cosec}^2 x,$$

avem şi:

$$\frac{u'}{1+u^2} + \frac{v'}{1+v^2} = \frac{w'}{1+w^2}.$$

N. N. MIHAILEANU

1640. — Se dă triunghiul dreptunghiu A B C în care A B > A C. Se duce în B pe A B o perpendiculară pe care se ia punctul E, astfel ca A D = A C şi se uneşte punctul D cu E. Să se demonstreze pe cale geometrică şi trigonometrică că, $\sphericalangle B\,E\,D = 45^0 - B$.

V ALACI

Manuscrise primite de la corespondenții noștrii până la 10 a lunei curente și anume: Articole (A), Note (N), probleme propuse (P) și probleme rezolvate indicate prin numărul lor de ordine.

Aman V. C-tin (1565, 1570, 1579, 1581, 1582, 1583, 1584, 1587, 1591, 1597, 1599); *Anastasescu M. Mihail* (1516, 1521, 1529, 1567, 1616); *Anastasiu M. Mihail* (P., 1599, 1603, 1611, 1614, 1625); *Andrievici N.* (1603, 1611, 1616, 1625, 1626), *Buznea D. Dinu* (1574, 1584, 1598, 1603, 1614); *Cristescu Dan* (1569, 1603, 1611); *Dăscălescu Hristache* (1569, 1586); *Diaconescu Marcel* (1587, 1625, 1626); *Drăgulescu Gh. Gheorghe* (1599); *Jidanu I. C-tin* (P., 1574, 1625, 1626, 1631); *Mahrenholz Johannes* (1612, 1619, 1620, 1621, 1623); *Popescu Adrian* (N., 1546, 1565, 1569, 1570, 1571, 1574, 1579, 1580, 1583, 1586, 1598, 1602, 1623, 1626), *Roth I. Alexandru* (P., 1579, 1602 1614, 1617, 1618, 1623); *Selmereanu Horia* (P., 1587, 1599, 1603, 1616, 1625), *Staicu I. N.* (1616, 1625); *Stoenescu D. Mirel* (P., 1536, 1584, 1616); *Theodorescu N. Dorin* (1413); *Tica P. Marin* (1580, 1585, 1614, 1620, 1623); *Vijelie Eugen* (1611, 1614, 1626); *Zamfirescu Gh. I.* (P.)

ȘCOALA POLITEHNICĂ TIMIȘOARA

Candidații reușiți la examenul de admitere în anul preparator, în ordinea clasificației

(Anul școlar 1937—1938)

1. *Duțu N. Tomsil*, Liceul Unirea, Focșani.
2. *Hompola I. Tiberiu*, Liceul Samuil Vulcan, Beiuș.
3. *Svircevschi I Gheorghe*, Liceul Marele Voevod Mihai, Cetatea-Albă.
4. *Berinde V. Tit. Liviu*, Liceul C. Bredicianu, Lugoj.
5. *Murgu V. Marțian*, Liceul Samuil Vulcan, Beiuș.
6. *Urban I. Vilhelm*, Liceul Traian, Turnu-Severin.
7. *Popa F. Mihail*, Liceul Frații Buzești, Craiova.
8. *Vas A. Nicolae*, Liceul Mihai Viteazul, Tg-Mureș.
9. *Biangardi M. Sebestian*, Liceul C. Diaconovici Loga, Timișoara.
10. *Crivinar I. Petru*, Liceul de băeți, Petroșani.
11. *Goron I. Remus*, Liceul Gheorghe Barițiu, Cluj.
12. *Magenbauer I. Rudolf*, Liceul Traian, Turnu-Severin.
13. *Vârlan Gh. Petrache*, Liceul V. Alexandri, Galați.
14. *Leferovici St. Simion*, Lic. Aron Pumnul, Cernăuți.
15. *Medeleanu I. Ioan*, Liceul C. Bredicianu, Lugoj.
16. *Opriș Al. Ioan*, Liceul Vasile Lucaci, Carei-Mari.
17. *Bălulescu A. Spiridon*, Liceul C. Diaconovici Loga, Timișoara.
18. *Tundrea T. Ioan*, Liceul Moise Nicoară, Arad.
19. *Szecsy St. Tiberiu*, Liceul de băeți, Petroșani.
20. *Vasiliu Gh. Cornel*, Liceul Național, Iași.
21. *Besuan Gr. Grigore*, Lic. Alex. Odobescu, Bistrița.
22. *Croitoru C. Gheorghe*, Lic. Gen. Dragalina, Oravița.
23. *Joni P. Nicolae*, Liceul B. P. Hașdeu, Chișinău.
24. *Târziu M. Gheorghe*, Liceul Piarist, Timișoara.
25. *Giurgiu V. Octavian*, Liceul Decebal, Deva.
26. *Tăranu P. Mircea*, Lic. C. Diaconovici Loga, Timișoara.
27. *Stoia T. Teodor*, Liceul, Piarist, Timișoara.
28. *Gherassy St. Nicolae*, Lic. Mihai Viteazul, București.
29. *Balint I. Octavian*, Liceul Regele Ferdinand, Turda.
30. *Boldea Gr. Toma*, Lic. C. Diaconovici Loga, Timișoara.
31. *Olah M. Mihail*, Liceul de băeți, Petroșani.
32. *Bu'duș M. Nicolae*, Liceul Emanoil Gojdu, Oradea.
33. *Farcu I. Victor*, Liceul Emanoil Gojdu, Oradea.
34. *Mihailov I. Vladimir*, Liceul Marele Voevod Mihai, Cetatea-Albă.
35. *Oloș P. Petru*, Liceul de băeți, Petroșani.
36. *Stoian Gr. Ștefan*, Liceul Traian Doda, Caransebeș.
37. *Stăncioiu Gh. Gheorghe*, Lic. C. Diaconovici Loga, Timișoara.
38. *Bratu Gh. Ioan*, Liceul Andrei Șaguna, Brașov.
39. *Cosma I. Aurel*, Liceul Gheorghe Barițiu, Cluj.
40. *Berdan Gh. Gheorghe*, Seminarul Pedagogic, Iași.
41. *Cioară D. Ioan*, Liceul Carol I, Craiova.
42. *Ciungan E. Eugen*, Liceul Sft. Vasile, Blaj.
43. *Novelli S. Ernesto*, Liceul Alex. Lahovary, Râmnicu-Vâlcea.
44. *Tomus Tr. Sidonia Volumina*, Lic. Reg. Maria, Cluj.
45. *Bodendorfer Gh. Gheorghe*, Lic. Titu Maiorescu, Aiud.
46. *Oltean Gh. Ilie*, Lic. St. O. Iosif, Odorhei.
47. *Straub I. Vilhelm*, Lic. Marele Voevod Mihai, Cernăuți.
48. *Toma A. Victor*, Liceul Andrei Mureșan, Dej.
49. *Moldovan I. Viorel*, Lic. Al. Pap. Ilarion, Tg-Mureș.
50. *Florascu I. Avram*, Liceul Gheorghe Lazăr, Sibiu.
51. *Medvedovici D. Constantin*, Liceul Național, Iași.
52. *Popovici A. E. Liviu*, Liceul Decebal, Deva.
53. *Rösch A. Robert*, Liceul German de Stat, Timișoara.
54. *Crican N. Constantin*, Liceul D. B. Stirbey, Câmpina.
55. *Dinu V. Lazăr*, Liceul Andrei Șaguna, Brașov.
56. *Dragomir I. Victor*, Liceul Traian Doda, Caransebeș.

ANUL XVII. 15 IANUARIE 1938 No. 11.

REVISTA MATEMATICĂ

DIN

TIMIȘOARA

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA APARE ODATA PE LUNA.

PREȚUL UNUI NUMAR 12 LEI PREȚUL ABONAMENTULUI 100 LEI PE AN.

CUPRINSUL

1 **V. ALACI**: † NICOLAE G. BOTEA.

2. **A. GLODEN**: SUR LES NOMBRES DE LA FORME a^2+ab+b^2 ET LES CHAINES QUINTIGRADES.

3. **GHITESCU SPIRIDON**: MECANISMUL CAPTURII LA STELELE DUBLE.

4. NOTE MATEMATICE: 24, 25, 26.

5. BIBLIOGRAFIE.

6. PROBLEME REZOLVATE: 1488, 1495, 1562, 1572, 1573, 1578.

7. PROBLEME PROPUSE: 1641-1648.

8. INFORMATIUNI

TIMISOARA

Institut de Arte grafice Tipografia Românească

„Orice profesor de matematici, din orice colţ al ţării şi de la orice şcoală, trebuie să fie apostol al specialităţii sale. Din felul cald şi luminos cum îşi face lecţiile, din drumul drept şi demn pe care îl urmează în viaţă, trebuie să apară limpede că judecata matematică precisă şi sigură, curată ca cristalul, are o înaltă şi admirabilă valoare educativă pentru viaţă.

Adevărul curat, adevărul drept, adevărul luminos, să fie îndreptarul vieţei noastre. Aceasta să fie contribuţia specialităţii noastre la îndrumarea neamului românesc, pe calea care-i stă deschisă".

G. ŢIŢEICA

Manuscrisele destinate Revistei Matematice din Timişoara conţinând soluţiunile problemelor propuse şi probleme, note sau articole originale vor fi trimise pe adresa: **V. Alaci,** profesor Şcoala Politechnică, Timişoara.

Plata abonamentului precum şi reclamaţiunile de neprimirea Revistei vor fi adresate d-lui **Prof. C. Teodorescu,** Rectorul Şcoalei Politechnice din Timişoara.

Plata abonamentului se face prin CEC (Casa de economii şi cecuri postale) unde revista are contul CEC No. 85208, sau prin mandat postal adresat d-lui Prof. C. TEODORESCU, Rectorul Şcoalei Politechnice din Timişoara.

Taxa de Membru în „Comitetul de Conducere al Revistei Matematice din Timişoara" este pentru anul XVII, de 200 (două sute) lei.

Colecţia R. M. T., se găseşte la Administraţia Revistei, şi se poate procura în schimbul preţului:

Anul I, epuizat. Anii: II—XVI inclusiv, broşate, 120 lei fiecare.

ANUL XVII — No. 11 TIMISOARA, 15 IANUARIE 1938

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA

APARE LA 15 A FIECAREI LUNI

PREŢUL UNUI NUMAR . . . . . 12 LEI
ABONAMENT ANUAL . . . . . 100 LEI
Abonamentele sunt socotite totdeauna dela 15 Martie

REDACŢIA: Prof. V. ALACI
Şcoala Politechnică din Timişoara.
ADMINISTRAŢIA: Prof. C. TEODORESCU
Rectorul Şcoalei Politechnice din Timişoara.

† NICOLAE G. BOTEA.

S'a desprins din mijlocul nostru, în floarea vârstei şi în virtutea unor legi neînţelese de noi, tânărul matematician român *N. G. Botea*, membru activ în Comitetul „R. M T".

M'a îndurerat profund această dispariţie prea timpurie a fostului meu distins elev din clasa I-a şi a II-a a liceului *Cantemir* din Bucureşti, unde am fost profesor în 1919—20—21.

Imi amintesc bine de tânărul *Botea* din clasa II-a de liceu, modest, sârguitor şi priceput, care cu răbdare, siguranţă şi exactitate, rezolva frumoasele probleme de construcţii şi demonstra proprietăţi geometrice interesante ale figurilor.

De atunci încă am remarcat un deosebit talent la tânărul meu elev şi am prevăzut traectoria luminoasă a activităţii sale. Dar timpul a trecut şi fostul meu elev a terminat cu succes liceul şi apoi universitatea de unde şi-a luat licenţa în matematici, fiind numit asistent la şcoala Politechnică din Bucureşti.

I-am urmărit în tot acest timp activitatea intensă în ogorul matematic şi buna sa pregătire i-a permis a afla rezultate noui şi interesante, mai ales în domeniul Geometriei către care era înclinat, rezultate publicate în diferite reviste de specialitate din ţară şi străinătate.

Astfel chiar în cursul liceului fiind, redactează cu alţi colegi revista „*Curierul Matematic*" şi lucrează intens la revistele din ţară „*Gazeta Matematică*", „*Revista Matematică din Timişoara*" şi „*Foaia Matematică din Chişinău*", fiind premiat de fiecare din aceste reviste.

După ce şi-a obţinut licenţa în matematici şi-a continuat mai departe activitatea la revistele de mai sus, unde a devenit membru activ şi s'a îndreptat şi spre alte reviste de un nivel mai ridicat, colaborând astfel la revista „*Mathesis din Bruxelles*", „*Buletinul Şcoalei Politechnice din Bucureşti*", „*Revista Universitară Matematică*", „*Mathematica din Cluj*", „*Buletinul Facultăţii de Ştiinţe din Cernăuţi*", „*Association française pour l'avancement des Sciences, Bruxelles*" şi *Buletinul matematic al Facultăţii de Ştiinţe*".

Voiu cita acum o parte din această intensă activitate a regretatului matematician *N. G. Botea*, născut în Galaţi la 17 Noemvrie 1908 şi stins din viaţa la 18 Decemvrie 1937, în vârsta de 29 de ani.

1°. *Generalizarea teoremei lui Aubert*, „*R.M.T.*", vol. XIII, p. 35.

2°. *Asupra problemei 320*, „*R. M. T.*", vol. VII, p. 198.

3°. *Teoreme în legătură cu două triunghiuri şi două poligoane*, „*R. M. T.*", vol. XIII, p. 37.

4°. *Proprietăţi ale triunghiului*, „*G. M*".

5°. *Coordonate isotrope*, în Revista Universitară Matematică.

6°. *Sur quelques équations aux dérivées partielles*, comunicări la Academia de Ştiinţe din Paris, în sedinţele din 14 Noemvrie şi 27 Decemvrie 1932.

7°. *Une rélation entre nombres complexes et la généralisation d'une théorème de géométrie élémentaire*, Bul. Şc. Politechnice din Bucureşti.

8°. *Sur un théorème de M. Pompeiu*, Bul. Şc. Polit. din Bucureşti.

9° şi 10°. *Deux théorèmes sur le triangle* şi *Une propriété de réciprocité*, Association française pour l'avancement des Sciences, 1932 şi 1933.

11°. *Sur la configuration formée par deux triangles et deux points*, Mathesis.

12°. *Sur la généralisation d'un théorème de lord Kelvin*, în Mathematica, Cluj.

13°. *Sur une classe d'équations aux derivées partielles*, în Bul. Fac. de Ştiinţe din Cluj.

14. *Le théorème des accroissements finis et les fonctions holomorphes,* în Bul. Mat. al Fac. de Ştiinţe din Bucureşti.

Regret din toată inima dispariţia din ogorul matematic al Ţării noastre a unei forţe de prima calitate, în plină ascenziune şi dezvoltare şi mărturisesc încă odată că mintea noastră nu poate să priceapă legile Mecanicei Divine, care creiază forţe atât de inaripate şi le stinge apoi înainte de vreme.

Dacă suflul de viaţă a tânărului *Botea* s'a stins, dacă sufletul său descătuşat dureros de întruchiparea materială pluteşte în zările senine ale nefiinţei, amintirea vieţei şi activităţii sale luminoase va rămâne vecinică în inima tuturor acelor ce l'au cunoscut, l'au apreciat şi l'au iubit.

PROF. V. ALACI

SUR LES NOMBRES DE LA FORME a^2+ab+b^2 ET LES CHAÎNES QUINTIGRADES.

Par A. GLODEN
(LUXEMBOURG)

A. **Théorème 1.** *Le produit de deux nombres de la forme* a^2+ab+b^2 *s'exprime de deux façons différentes par un nombre de la même forme.*

On a, en effet,

$$(m^2+mn+n^2)(p^2+pq+q^2)=$$

$$(mp-nq)^2+(mp-nq)[n(p+q)+mq]+[n(p+q)+mq]^2=$$

$$(mq-np)^2+(mq-np)[n(p+q)+mp]+[n(n+q)+mp]^2.$$

La 2e expression se déduit de la 1re en remplaçant partout p par q, et vice versa.

Théorème 2. *Si* m^2+mn+n^2 *représente un nombre premier, son carré est représentable d'une façon par la même forme; plus généralement, sa* $(2t-1)^e$ *et sa* $(2t)^e$ *puissance par t expressions distinctes de la même forme.*

Nous avons, d'après le théorème 1,

$$(m^2+mn+n^2)^2=(m^2-n^2)^2+$$

$$(m^2-n^2)(2mn-n^2)+(2mn+n^2)^2.$$

Nous ne compterons pas la représentation où l'un des nombres m ou n est nul.

Ensuite,

$$(m^2+mn+n^2)^3=P^2+PQ+Q^2=P'^2+P'Q'+Q'^2$$

$$\begin{cases} P=m^3-3mn^2-n^3 \\ Q=3mn(m+n), \end{cases}$$

$$\begin{cases} P'=m^2n+mn^2+n^3=n(m^2+mn+n^2) \\ Q'=mn^2+m^2n+m^3=m(m^2+mn+n^2), \end{cases}$$

$$(m^2+mn+n^2)^4=R^2+RS+S^2=R'^2+R'S'+S'^2$$

$$\begin{cases} R=m^4-6m^2n^4-mn^3 \\ S=4m^3n+6m^2n^2-n^4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} R'=(m^2-n^2)(m^2+mn+n^2) \\ S'=(2mn+n^2)(m^2+mn+n^2) \text{ etc.} \end{cases}$$

Théorème 3. *Le produit de plusieurs nombres premiers de la forme* a^2+ab+b^2 *ou de leurs puissances, soit* $N=n^\alpha n'^\beta n''^\gamma$ *est représentable de* $\frac{(\alpha+1)(\beta+1)(\gamma+1)}{2}$ *façons distinctes par la forme* a^2+ab+b^2, *à condition que l'un au moins des exposants soit impair, et de* $\frac{(\alpha+1)(\beta+1)(\gamma+1)}{2}-\frac{1}{2}$ *façons, si tous les exposants sont pairs.*

Exemples numériques.

Représentation de 7 et de ses puissances par la forme a^2+ab+b^2

$$\begin{cases} 7=2^2+2.1+1^2 \\ 7^2=5^2+5.3+3^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 7^3=18^2+18.1+1^2=14^2+14.7+7^2 \\ 7^4=39^2+39.16+16^2=35^2+35.21+21^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 7^5=87^2+62.87+62^2=98^2+98.49+49^2 \\ \qquad =126^2+126.7+7^2 \\ 7^6=323^2+323.37+37^2=245^2+245.147+147^2 \\ \qquad =273^2+273.112+112^2. \end{cases}$$

Le nombre des représentations du nombre

$$7^3.13^2.19=\frac{4.3.2}{2}=12.$$

On a, en effet, $1.101.373=$

$$721^2+721.483+483^2=924^2+924.217+217^2=$$

$$819^2+819.364+364^2=1001^2+1001.91+91^2=$$

$$676^2+676.533+533^2=767^2+767.429+429^2=$$

$$908^2+908.241+241^2=1031^2+1031.36+36^2=$$

$967^2 + 967.149 + 149^2 = 979^2 + 979.129 + 129^2 =$
$644^2 + 644.567 + 567^2 = 861^2 + 861.308 + 308^2.$

Notons l'égalité

$$26^4 + 26^2.533 + 533^2 = 1031^2 + 1031.6^2 + 6^4.$$

B. *Si l'on a des nombres a, b, c, d, e, f etc. vérifiant les égalités*

$$a^2 + ab + b^2 = c^2 + cd + d^2 = e^2 + ef + f^2 = \cdots,$$

on aura aussi

$$(-a-b)^r + (-b)^r + (-a)^r + a^r + b^r + (a+b)^r =$$
$$(-c-d)^r + (-d)^r + (-c)^r + c^r + d^r + (c+d)^r = \cdots$$
$$(r = 1, 2, 3, 4, 5).$$

Cette remarque est due à M. *Schiffner* (voir Sphinx, 1936, page 75).

On peut, d'après une propriété des égalités multigrades, ajouter à tous les termes un même nombre, et on se sert de cette propriété pour obtenir des chaînes quintigrades à termes tous positifs.

Exemples. Des représentations de 7^3 et de 7^4 nous tirons les égalités quintigrades :

$$3^r + 4^r + 21^r + 23^r + 40^r + 41^r =$$
$$1^r + 8^r + 15^r + 29^r + 36^r + 43^r,$$
$$2^r + 18^r + 41^r + 73^r + 96^r + 112^r =$$
$$1^r + 22^r + 36^r + 78^r + 92^r + 113^r$$
$$(r = 1, 2, 3, 4, 5).$$

$S_1 = 132$, $S_2 = 4276$, $S_3 = 154.440$, etc.
$S'_1 = 342$, $S'_2 = 29098$, $S'_3 = 2.753.442$, etc.

Les représentations de 7^5 et de 7^6 fournissent chacune une chaîne quintigrade à 3 maillons :

$$1^r + 63^r + 88^r + 212^r + 237^r + 299^r =$$
$$3^r + 52^r + 101^r + 199^r + 248^r + 297^r =$$
$$17^r + 24^r + 143^r + 157^r + 276^r + 283^r.$$
$$(r = 1, 2, 3, 4, 5).$$

$S_1 = 900$, $S_2 = 202.228$, $S_3 = 50.502.600$ etc.

$$33^r + 70^r + 356^r + 430^r + 716^r + 753^r =$$
$$1^r + 148^r + 246^r + 540^r + 638^r + 785^r =$$
$$8^r + 120^r + 281^r + 505^r + 666^r + 778^r$$
$$(r = 1, 2, 3, 4, 5).$$

$S_1 = 2358$, $S_2 = 1.397.290$ etc.

Les représentations du nombre $7^3 . 13^2 . 19$ donnent une chaîne quintigrade à 12 maillons. Nous ajouterons à tous les termes le nombre 1212.

$$8^r + 491^r + 729^r + 1695^r + 1933^r + 2416^r =$$
$$71^r + 288^r + 995^r + 1429^r + 2136^r + 2353^r =$$
$$29^r + 393^r + 848^r + 1576^r + 2031^r + 2395^r =$$
$$120^r + 211^r + 1121^r + 1303^r + 2213^r + 2304^r =$$
$$3^r + 536^r + 679^r + 1745^r + 1888^r + 2421^r =$$
$$16^r + 445^r + 783^r + 1641^r + 1979^r + 2408^r =$$
$$63^r + 304^r + 971^r + 1453^r + 2120^r + 2361^r =$$
$$135^r + 181^r + 1176^r + 1248^r + 2243^r + 2289^r =$$
$$96^r + 245^r + 1063^r + 1361^r + 2179^r + 2328^r =$$
$$104^r + 233^r + 1083^r + 1341^r + 2191^r + 2320^r =$$
$$1^r + 568^r + 645^r + 1779^r + 1856^r + 2423^r =$$
$$43^r + 351^r + 904^r + 1520^r + 2073^r + 2381^r.$$
$$(r = 1, 2, 3, 4, 5).$$

$S_1 = 7272$, $S_2 = 13.219.156$ etc.

C. *Notre procédé permet d'obtenir des expressions générales pour les termes d'une égalité et aussi d'une chaîne quintigrade.*

Nous l'appliquerons au cas d'une égalité quintigrade (à 2 chaînons). On a

$$(x - a - b)^r + (x - b)^r + (x - a)^r + (x + a)^r +$$
$$(x + b)^r + (x + a + b)^r =$$
$$(x - c - d)^r + (x - d)^r + (x - c)^r + (x + c)^r +$$
$$(x + d)^r + (x + c + d)^r$$
$$(r = 1, 2, 3, 4, 5),$$

pour les systèmes suivants de valeurs de a, b, c, d :

a	b
$m^3 - 3mn^2 - n^3$	$3mn(m+n)$
$m^4 - 6m^2n^2 - 4mn^3$	$4m^3n + 6m^2n^2 - n^4$
$mp - nq$	$n(p+q) + mq$

c	d
$n(m^2 + mn + n^2)$	$m(m^2 + mn + n^2)$
$(m^2 - n^2)(m^2 + mn + n^2)$	$(2mn + n^2)(m^2 + mn + n^2)$
$mq - np$	$n(p+q) + mp$

Ces valeurs proviennent des représantations de $N = n^3$ ou $N = n^4$ resp. $N = n\,n'$.

On peut l'appliquer pour l'obtention d'une chaîne quintigrade à un nombre quelconque de chaînons.

MECANISMUL CAPTURII LA STELELE DUBLE

De GHIȚESCU SPIRIDON
PROFESOR SECUNDAR

Prin stele duble se înțeleg acele stele care, observate cu ochiul liber, se văd ca o singură stea, iar prin aparate de observație puternice, se văd că sunt două stele diferite și foarte aproape una de alta. *Herschel* a descoperit pentru prima dată existența stelelor duble, căutând să determine paralaxele stelelor. Stelele duble se împart în două categorii: stele geometric duble, care nu sunt decât un efect de perspectivă și stele duble propriu-zise. Numărul stelelor duble se ridică azi la câteva mii, ele satisfăcând în mișcarea lor legile lui *Kepler*, precum și legea gravitației universale. Azi există o știință de sine stătătoare a stelelor duble. În cele ce urmează voiu expune câteva idei noui în legătură cu aceste stele duble.

Am spus mai sus că stelele duble satisfac legile lui *Kepler*. Aceasta înseamnă că steaua cea mică descrie în jurul celei mari o elipsă, cea mare fiind situată într'unul din focare. Cu alte cuvinte, raportul dintre componentele stelei mici și steaua centrală, este mare, tinzând la limită către infinit. Amintim faptul că la Soare, raportul dintre componentele sistemului solar și Soare este o constantă foarte mică, care tinde la limită către zero.

Mecanica ne învață că orbitele, descrise de astre supuse legii gravitației universale, sunt secțiuni conice: elipse, iperbole, sau parabole. Astfel în sistemul nostru solar, planetele descriu elipse în jurul Soarelui (mai precis în jurul centrului de gravitate); la fel fac și cometele periodice. Cometele neperiodice descriu curbe iperbolice sau parabolice, curbe discontinui, sosind în sistemul nostru solar din adâncul spațiului, trecând la perigeu, ca apoi să se depărteze în infinit. Prin urmare: steaua dublă fiind un sistem stabil, mișcarea ei relativă trebuie să fie eliptică, traectoria fiind o curbă închisă. Totuși la cele mai multe stele duble, care sunt mai aproape de Pământ, s'a observat o mișcare rectilinie, care nu se știe până în ziua de azi dacă se va transforma într'o mișcare eliptică. Chestiunea nouă care s'a propus astăzi este următoarea: Sunt stele duble, cari au o traectorie iperbolică sau parabolică? In caz afirmativ acele stele duble nu sunt sunt stele duble temporare, cele mici trebuind să se depărteze de cele mari. In acest caz toată teoria originii stelelor duble cade, trebuind să fie înlocuită cu una nouă.

Această problemă a fost pusă și studiată recent de domnul *P. Baize*. El a fost urmărit de ideea că pe sfera cerească stelele duble au fost observate numai în vecinătatea focarului, studiul lor fiind foarte recent. In vecinătatea focarului însă, conicele, elipsa, iperbola și parabola au mare asemănare de formă. Prin urmare, este foarte posibil, spune domnul *P. Baize*, ca unele stele duble să se miște după iperbole sau parabole. In particular domnul *P. Baize* studiază două cazuri caracteristice: cazul stelei $\Sigma 2$ (din constelația Ursa Mare) și cazul stelei Δ Lebăda (din constelația Lebăda).

Steaua $\Sigma 2$ din Ursa-Mare, descoperită de *W. Herschel* la 2 Iunie 1782, este formată din două stele, una de mărimea 5-a, alta de mărimea 8,5 cel puțin. Steaua principală este galbenă, cea mică albastră, fără îndoială unice prin contrast. In 1906, *Lewis* înlătură ipoteza unei mișcări rectilinii, stabilind graficul orbitei cu o perioadă de 180 ani. In 1918, *Doolitle* relevă faptul că mișcarea stelei mici pe orbita sa se accelerează, trecând dela $0''{,}0478$ pe an din 1885, la $0''{,}0888$ pe an în anul 1918. In anul 1919, *Russell* calculează o nouă orbită cu perioada minimă de 470 ani. Foarte recent, în anul 1935, domnul *J. L. Halpern*, după îndemnul domnului *Van Biesbroeck*, a reluat chestiunea și a ajuns la concluzia că observațiunile făcute înaintea lui, și chiar cele făcute de el, pot da naștere foarte bine la o parabolă sau la o elipsă cu excentricitatea mare, având o perioadă de 10.850 ani. Dar dacă se admite o orbită eliptică, dimensiunile ei vor fi extraordinare: semi-axa mare egală cu 25,50, unități astronomice, perioada trecând de 10.000 ani. Mărimea mijlocie a paralaxei unei stele duble nefiind mai mare de 0,057, se obține pentru semi-axa mare 447,4 unități astronomice, adică o dis-

tanţă mijlocie de 671 miliarde de kilometri. Insă numărul cel mai mare al sistemelor orbitale cunoscute au distanţele mijlocii cuprinse între 10 şi 30 unităţi astronomice. Domnul *P. Baize* consideră această evaluare de distanţă ca extrem de neprobabilă, înclinând să creadă că mişcarea stelei duble Σ 2 din Ursa-Mare nu se face după o curbă eliptică, ci după o curbă parabolică. Istoria componentelor acestei stele duble se presintă deci astfel: „Cele două stele erau străine una de alta acum 200 sau 300 de ani; hazardul mişcărilor proprii ale stelelor, a făcut ca steaua *B* să intre în sfera de atracţie a stelei *A*, schimbându-se atunci traectoria rectilinie iniţială. Steaua cea mai mică a trecut la maximum de apropriere aparentă, iar către anul 1918, distanţa fiind de *18* unităţi astronomice. Acum steaua se depărtează, încât toată chestiunea este de a şti dacă această apropriere n'a fost decât temporară, adică dacă steaua cea mică nu descrie o ramură de parabolă! Numai observaţiunile viitoare ne vor lămuri această chestiune" spune domnul *P. Baize.*

A doua stea caracteristică este Δ Lebăda a cărei orbită n'a fost încă definitiv determinată. *Burnham* în anul 1897, *Lewis* în anul 1906, au ajuns la concluzia că problema este nedeterminată: perioadele sunt situate între 300 şi 1040 de ani. Orbita mult mai recentă a lui *Jakson* satisface mai mult problema; din nenorocire însă, orbita aceasta este, de vreo câţiva ani, în desacord cu observaţiunile. In ultimul timp, la începutul anului 1936, domnul *Ch. Volet* a fost tentat să calculeze orbita acestui cuplu, încercând diferite metode, obţinând când elipse, când iperbole. El a fost nevoit să conchidă că, în starea actuală a observaţiunilor, nu se poate afirma nimic despre natura orbitei, că prin urmare, este foarte comod a se representa observaţiunile printr'o parabolă. Se adaugă faptul că, dacă această orbită ar fi o elipsă, perioada ar trebui să fie superioară lui 600 de ani. Domnul *P. Baize* este mai concis: el presupune că Δ Lebăda, ca şi Σ 2 Ursa-Mare (poate ca şi γ Lebăda) ne oferă un exemplu de *captură* în acţiune. Observaţiunile au arătat că distanţa între cele două stele este de cel puţin 57—58 unităţi astronomice, aceasta pe timpul lui *Herschel* (1783), că la perigeu este de 39 unităţi astronomice şi că în momentul de faţă este de cel puţin 50 unităţi astronomice. Vitezele celor două stele duble sunt de 42 kilometri pe secundă.

Sprijinindu-se pe aceste date, domnul *P. Baize* conchide: „Se poate foarte bine presupune că, pe bolta cerească, alăturea de stele optic-duble, sau de stele duble cu traectorii eliptice, sunt stele duble cu traectorii iperbolice sau parabolice". Dacă este aşa, ipoteza capturii la stelele duble găseşte o confirmare în faptele astronomice observate.

Cosmogonia ştiinţifică caută să stabilească diferite teorii cari să explice evoluţia stelelor: împărţirea astrelor după procese mecanice sau fisice interne; condensarea nebuloaselor şi concentrarea maselor; loviri şi ciocniri între astre diferite. Procedeul *„Capturii"* este ultima teorie care explică evoluţia stelelor. Această teorie joacă un rol important în multe ipoteze noui cosmogonice, în particular ale lui *See* şi *Moulton-Chamberlin.*

Captura poate să se producă în urma aproprierii întâmplătoare a două stele; această apropriere poate fi suficientă pentru a le face să se abată din drumul lor şi să se atragă una către alta. Dacă se produce o ciocnire, atunci este o catastrofă cosmică. Astfel *Captura* poate explica apariţia „Novelor" precum şi „Formarea Lumilor Noui". Cazurile ciocnirilor directe sunt mai rare decât cazurile ciocnirilor indirecte, sau jumătăţilor de ciocniri, prin care traectoriile rectilinii ale celor două stele se transformă în iperbole sau parabole. In caz de ciocnire pe jumătate, are loc o „Captură" temporară: cele două stele, după ce au trecut printr'un maximum de apropriere, se depărtează din nou, ducându-se în infinit. Pentru a se produce o „Captură" permanentă, care să ducă la formarea unui sistem fisic de stea dublă, trebuie ca parabola sau iperbola să se transforme într'o elipsă, într'o curbă închisă.

Teoria aceasta nouă va putea explica existenţa stelelor duble visuale cu o perioadă lungă, pentru cari durata revoluţiei poate să atingă sau chiar să depăşească 200 de ani şi pentru cari excentricitatea este foarte mare. Capturile de felul acesta sunt foarte rare. Totuşi, frequenţa stelelor duble este mare: $\frac{1}{3}$ sau $\frac{1}{2}$. Acest procedeu va explica ceva mai greu deasemenea formarea stelelor duble sau triple. Este mult mai uşor să se explice formarea

stelelor duble visuale, a stelelor duble spetroscopice, prin fragmentarea astrelor. Insă la rândul ei, teoria fragmentării astrelor este insuficientă să explice formarea stelelor duble cu perioadă lungă şi excentricitate mare, precum şi acele cu componente neegale. Totuşi şi jumătăţile de ciocniri între stele sunt foarte rare. *Jeans* a calculat că aproprierea dintre stele, la două sute de unităţi astronomice, nu se întâmplă decât odată în 30 milioane de ani. Procedeul „Capturii" pare deci foarte nesigur. Dar, tot după domnul *P. Baize,* numărul orbitelor neeliptice printre stelele duble cu lungă perioadă arată posibilitatea acestor întâlniri de stele precum şi verificarea teoriei „Capturii" de stele.

NOTE MATEMATICE

24. — *Rezolvarea unor ecuaţiuni diophantiene.*

1. In No. 7 din anul XVII al Revistei Matematice din Timişoara d-l *A. Gloden* (Luxembourg) dă soluţiile întregi ale unor ecuaţiuni diophantiene pornind dela oarecare identităţi. Aceste identităţi servesc a afla soluţiile ecuaţiilor considerate şi se pot găsi direct în acelaşi mod ca soluţiile ecuaţiei $x^2 + y^2 = z^2$. Astfel, se ştie că, un sistem de soluţii ale acestei ecuaţii se capătă dacă punem:

$$(p + iq)^2 (p - iq)^2 = (x + iy)(x - iy), \quad (i = \sqrt{-1})$$

unde p şi q sunt numere întregi de paritate diferită.

Din egalitatea de mai sus deducem:

$$x = p^2 - q^2; \quad y = 2pq; \quad z = p^2 + q^2.$$

Avem deci

$$(p^2 - q^2)^2 + (2pq)^2 = (p^2 + q^2)^2.$$

Dacă aci facem $p = 2r^2$, $q = s^2$ obţinem prima identitate, din nota d-lui *Gloden,* şi dacă facem $p = r^2\sqrt{2}$, $q = s^2\sqrt{2}$ obţinem al 2-a identitate a d-sale.

2. Să considerăm ecuaţia $z^n = x^2 + y^2$ pe care o putem pune sub forma:

$$(p + iq)^n (p - iq)^n = (x + iy)(x - iy),$$

de unde deducem:

$$x + iy = (p + iq)^n = A + iB$$
$$x - iy = (p - iq)^n = A - iB,$$

şi deci:

$$x = A = p^n - C_n^2 p^{n-2} q^2 + C_n^4 p^{n-4} q^4 - \cdots$$
$$y = B = C_n^1 p^{n-1} q - C_n^3 p^{n-3} q^3 + C_n^5 p^{n-5} q^5 - \cdots$$
$$z = p^2 + q^2.$$

In cazul particular $n = 4$ găsim

$$x = p^4 - 6p^2q^2 + q^4; \quad y = 4pq(p^2 - q^2); \quad z = p^2 + q^2,$$

soluţiile ecuaţiei: $z^4 - x^2 + y^2$, care înlocuite în ecuaţie ne dau ultima identitate din nota d-lui *Gloden.*

3. Ecuaţia de forma $x^2 + ay^2 = z^2$ o putem pune sub forma:

$$x^2 + ay^2 = (p^2 + aq^2)^2,$$

care se descompune în:

$$(x + y\sqrt{-a})(x - y\sqrt{-a}) = (p + q\sqrt{-a})^2 (p - q\sqrt{-a})^2$$
$$x + iy\sqrt{a} = p^2 - aq^2 + 2pqi\sqrt{a}$$
$$x - iy\sqrt{a} = p^2 - aq^2 - 2pqi\sqrt{a},$$

de unde avem:

$$x = p^2 - aq^2; \quad y = 2pq; \quad z = p^2 + aq^2.$$

4. In acelaş mod rezolvăm ecuaţia: $x^2 + ay^2 = z^n$.

Pentru aceasta punem:

$$x^2 + ay^2 = (p^2 + aq^2)^n,$$

care ne dă:

$$x + iy\sqrt{a} = (p + iq\sqrt{a})^n = A + iB\sqrt{a}$$
$$x - iy\sqrt{a} = (p - iq\sqrt{a})^n = A - iB\sqrt{a},$$

de unde

$$x = A = p^n - C_n^2 p^{n-2} q^2 a + C_n^4 p^{n-4} q^4 a^2 - \cdots$$
$$y = B = C_n^1 p^{n-1} q - C_n^3 p^{n-3} q^3 a + C_n^5 p^{n-5} q^5 a^2 - \cdots$$
$$z = p^2 + aq^2.$$

In cazul particular $a = 2$, $n = 4$, ecuaţia: $x^2 + 2y^2 = z^4$ admite soluţiunile:

$$x = p^4 - 12p^2q^2 + 4q^2; \quad y = 4pq(p^2 - 2q^2);$$
$$z = p^2 + 2q^2,$$

care introduse în ecuaţie ne dau ultima identitate din al 2-lea grup de identităţi considerate de d-l *Gloden* (publicat în Mathesis).

5. Să considerăm ecuaţia $x^2+ay^2=bz^2$ pe care o punem sub forma:

$$x^2+ay^2=(\alpha^2+a\beta^2)(p^2+aq^2)^2,$$

de unde:

$$x+iy\sqrt{a}=(\alpha+i\beta\sqrt{a})(p+iq\sqrt{a})^2$$

$$x-iy\sqrt{a}=(\alpha-i\beta\sqrt{a})(p-iq\sqrt{a})^2$$

şi prin urmare:

$$x=\alpha(p^2-aq^2)-2a\beta pq$$

$$y=\beta(p^2-aq^2)+2\alpha pq$$

$$b=\alpha^2+a\beta^2;\quad z=p^2+aq^2.$$

Exemplu: Ecuaţia $x^2+3y^2=7z^2$ unde $a=3$, $\alpha=2$ şi $\beta=1$ $(7=2^2+3.1^2)$ admite soluţii de forma:

$$x=2(p^2-3q^2)-6pq;\quad y=p^2-3q^2+4pq;$$

$$z=a^2+3q^2.$$

6. Ecuaţia $x^2+ay^2=bz^n$ o putem pune sub forma:

$$x^2+ay^2=(\alpha^2+a\beta^2)(p^2+aq^2)^n.$$

care ne dă:

$$x+iy\sqrt{a}=(\alpha+i\beta\sqrt{a})(A+iB\sqrt{a})$$

$$x-iy\sqrt{a}=(\alpha-i\beta\sqrt{a})(A-iB\sqrt{a}),$$

unde A şi B au valorile dela paragraful 4. Din egalităţile de mai sus scoatem

$$x=\alpha A-a\beta B;\quad y=\alpha B+\beta A;\quad z=p^2+aq^2.$$

Exemplu: Ecuaţia $x^2+5y^2=9z^3$ unde $a=5$, $\alpha=2$, $\beta=1$ şi $n=3$, avem:

$$A=p^3-15pq^2;\quad B=3p^2q-5q^3;$$

$$x=2(p^3-15pq^2)-5(3p^2q-5q^3),$$

$$y=p^3-15pq^2+2(3p^2q-5q^3),$$

$$z=p^2+5q^2.$$

Soluţii care ne dau identitatea:

$$[2(p^2-15pq^2)-5(3p^2q-5q^3)]^2+$$

$$5[p^3-15pq^2+2(3p^2q-5q^3)]^2=9(p^2+5q^2)^3.$$

Am invederat astfel o metodă directă pentru a rezolva unele ecuaţiuni diophantiene, spre deosebire de metoda d-lui *Gloden*, care porneşte de la anumite identităţi din care deduce soluţiile unor anumite ecuaţii diophantiene.

D. GEORGESCU
Profesor

25. — *Demonstraţie elementară a imposibilităţii rezolvării raţionale a ecuaţiei,* $x^4+y^4=z^4$.

Imposibilitatea rezolvării în numere raţionale a ecuaţiei $x^4+y^4=z^4$ a fost deja dovedită de *Euler*. Fiindcă această ecuaţie prezintă un caz special a ecuaţiei pitagorice, soluţia sa este cuprinsă în formula lui *Brahmagupta:*

$$(a^2-b^2)^2+(2ab)^2=(a^2+b^2)^2,$$

unde a şi b sunt numere raţionale.

Urmează să punem mai departe:

$$a^2+b^2=p^2$$

$$a^2-b^2=m^2,$$

de unde:

$$2a^2=p^2+m^2$$

relaţie care este soluţionabilă în numere întregi.

Ar trebui atunci ca m^2, a^2, p^2 sau (a^2-b^2), a^2, (a^2+b^2) să reprezinte o progresie aritmetică a cărei *raţie însăşi* este un patrat raţional, adică b^2.

Acuma cele trei patrate raţionale pot forma o progresie aritmetică, însă raţia acestei progresiuni nu poate ea însăşi să fie un patrat perfect (cf. *Carmichael*, Analyse indéterminée, page 13). Astfel ecuaţia $x^4+y^4=z^4$ nu se poate soluţiona raţional.

A. MOESSNER
(Nürnberg)

26. — *Observare relativ la nota matematică: „Sur une méthode de formation des égalités multigrades":*

$$a_1^p+a_2^p+\cdots=b_1^p+b_2^p+\ldots,(p=1,3,5,\ldots,2n+1),$$

din „R. M. T.", anul XVI, No. 12.

In „R. M. T.", an. XVI, No. 12, se găseşte identitatea d-lui *A. Gloden*, de forma:

$$a_1^p+a_2^p+\cdots=b_1^p+b_2^p+\ldots,(p=1,3,5,\ldots,2n+1).$$

Eu găsesc după metoda d-sale o astfel de identitate, ca acea dată de d-l *Gloden*, însă cu mai puţini termeni.

a. Avem: $(1, 6, 8, 11, 20, 21, 21, 22, 31, 36, 47, 51, 52, 67, 68, 79, 80, 82, 90, 93, 94, 95, 104, 105)^p = (2, 3, 12, 13, 14, 17, 25, 27, 28, 39, 40, 55, 56, 60, 71, 76, 85, 86, 86, 87, 96, 99, 101, 106)^p$,

$(p = 1, 2, 3, \ldots, 11, 12)$.

De aci urmează identitatea:

$(3, 5, 13, 35, 45, 63, 65, 65, 67, 85, 91, 95, 105)^p = (27, 29, 51, 53, 57, 73, 79, 81, 83, 101, 103)^p$, $(p = 1, 3, 5, \ldots, 12)$, cu 13 termeni în partea stângă şi 11 termeni în partea dreaptă.

b. Avem: $(12, 17, 19, 19, 21, 23, 33, 37, 42, 44, 44, 46, 58, 60, 65)^p = (2, 4, 4, 6, 9, 13, 25, 27, 27, 29, 36, 38, 41, 50, 50, 52, 63, 64)^p$, $(p = 1, 3, 5, \ldots, 11, 13)$ cu 15 termeni în partea stângă şi 18 termeni în partea dreapta.

A. MOESSNER
(Nürnberg)

BIBLIOGRAFIE

1. *Gazeta Matematică*, anul XLIII, No 4, Decemvrie 1937. † *Gh. Em. Filipescu*, de *D. Stan*. Din viaţa şi activitatea lui *Descartes*, de *G. Ţiţeica*. Cărţi vechi de matematică, de *I. Ionescu*. Consideraţii invariant-teoretice asupra patrulaterului, (urmare şi sfârşit), de *D. Barbelian*. Raport pentru premiu Ing *H. Capriel*, de *G. Ţiţeica*, *Alexandru Bunescu* şi *Miron Niculescu*. Note matematice. Bibliografie, Cereri, Diverse. Probleme rezolvate şi propuse.

2. *Boletin Matematico*, anul X, No. 7, Noemvrie 1937 Buenos Aires Asupra unor triunghiuri pitagorice (continuare), de *R. Noguera*. Probleme propuse.

3. *Boletin Matematico*, anul X, No. 8, Noemvrie 1937, Buenos Aires. Informaţii bibliografice, cărţi şi reviste. Mişcelanea.

4. *Revista Cercului de Studii şi a Asociaţiei Absolvenţilor Şcoalei Superioare P. T. T., Timişoara*, anul VI, No. 12. Studiul echilibrului şi al tensiunilor într'un fir metalic, de *Dili-Schiteru*. Iluminatul e'ectric de elev *Otta Teodor*. Reprezentarea grafică a curentului alternativ (après L'Electricien), de *Popescu C-tin*. Conţine şi alte articole de specialitate.

PROBLEME REZOLVATE

1488. — *Notaţiile fiind cele obicinuite într'un triunghiu să se stabilească relaţia:*

$$\sum \frac{(h_a - r)(h_b - r)}{h_a h_b} - \frac{1}{4} \sum \frac{(r_a - r)(r_b - r)}{r_a r_b} = 1.$$

M I. PREDOESCU

Se cunosc formulele:

$$r = \frac{S}{p}, \quad r_a = \frac{S}{p-a}, \quad r_b = \frac{S}{p-b},$$

cu ajutorul cărora avem:

$$\frac{r_a - r}{r_a} = 1 - \frac{r}{r_a} = 1 - \frac{p-a}{p} = \frac{a}{p},$$

şi analog:

$$\frac{r_b - r}{r_b} = \frac{b}{p},$$

astfel că:

$$(1) \quad \sum \frac{(r_a - r)(r_b - r)}{r_a r_b} = \sum \frac{ab}{p^2} = \frac{ab + bc + ca}{p^2}.$$

De altă parte, având în vedere şi relaţiile cunoscute:

$$S = \frac{a h_a}{2} = \frac{b h_b}{2}, \quad \text{deci} \quad h_a = \frac{2S}{a}, \quad h_b = \frac{2S}{b},$$

deducem:

$$\frac{h_a - r}{h_a} = 1 - \frac{r}{h_a} = 1 - \frac{a}{2p} = \frac{b + c}{2p},$$

şi analog:

$$\frac{h_b - r}{h_b} = \frac{c + a}{2p}.$$

De aci urmează:

$$(2) \quad \sum \frac{(h_a - r)(h_b - r)}{h_a h_b} = \frac{(b + c)(c + a)}{4p^2} =$$

$$\sum \frac{c^2 + ab + bc + ca}{4p^2} = \frac{a^2 + b^2 + c^2 + 3ab + 3bc + 3ca}{4p^2}.$$

Primul membru din enunţ, se poate scri în virtutea relaţiilor (2) şi (1)

$$\sum \frac{(h_a - r)(h_b - r)}{h_a h_b} - \frac{1}{4} \sum \frac{(r_a - r)(r_b - r)}{r_a r_b} =$$

$$\frac{a^2 + b^2 + c^2 + 3ab + 3bc + 3ca}{4p^2} - \frac{ab + bc + ca}{4p^2} =$$

$$\frac{a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca}{4p^2} = \frac{(a + b + c)}{4p^2} = 1.$$

Astfel identitatea dată este stabilită.

Soluţii date de d-ra: *Comloşan Cornelia* (studentă, Cluj) şi de d-nii: *Amărăşteanu F. Marcel* (bacalaureat, Craiova), *Apostol Radu* (lic. Milit., N. Filipescu), *Begu I. Ştefan*, *Cazanacli V. Petre* (Chişinău), *Davidovici Paul*, *Florescu L. Victor* (lic. Milit., N. Filipescu), *Georgescu Corneliu*, *Lăzărescu Stelian* (lic. Milit., N. Filipescu), *Lupescu Gh. Corneliu* (Şc. Of. de Artilerie), *Marica Pompeiu* (lic. Beiu), *Moisovici Ştefan* (bacalaureat), *Murgu V. Marţian* (lic.

Beiuş), *Negrea A. Leonte-Mircea* (Brăila), *Negulescu Ştefan* (lic. Milit., N. Filipescu), *Pasere Emil* (lic. Milit., Tg-Mureş), *Petrescu-Craiovita Anastasie* (Craiova), *Popescu Zorica Alexandru* (lic. Iosif, Bucureşti), *Popovici I. Gavril* (student), *Rada D-tru* (lic. Arad), *Rădulescu Gh. Octavian* (lic. Milit, N. Filipescu), *Ripianu Andrei* (Braşov), *Rosemberg I.* (lic. Roman), *Ştefănescu Costin* (lic. Milit, N. Filipescu), *Ştefănescu D. Nicolae*, *Stoenescu D. Mirel*, *Tica P. Marin* (Sub-Lt), *Tilică C. Ştefan* (lic. T-Severin), *Viciu A. Aurel* (lic. T-Mureş) şi *Vlad I. C. M.* (Sub-Lt).

Altă soluţie. In nota matematică *„Asupra unor relaţii trigonometrice“* a d-lui *Cezar Ivănescu*, din „R. M. T.“, anul XV, p. 30, sunt stabilite următoarele relaţii:

$$\sum \frac{(h_a - r)(h_b - r)}{h_a h_b} = \frac{5p^2 + r^2 + 4Rr}{4p^2},$$

$$\sum \frac{(r_a - r)(r_a - r)}{r_a r_b} = \frac{p^2 + r^2 + 4Rr}{p^2},$$

cu ajutorul cărora deducem:

$$\sum \frac{(h_a - r)(h_b - r)}{h_a h_b} - \frac{1}{4}\sum \frac{(r_a - r)(r_a - r)}{r_a r_b} = \frac{4p^2}{4p^2} = 1.$$

Soluţii date în felul acesta de d-nii: *Cotescu C-tin* (lic Milit, Iaşi) şi *Matei D. D-tru* (lic. Internat, Iaşi).

1495. — *Să se rezolve sistemul:*

$$\begin{cases} \dfrac{\sin^3 x + \sin^3 y}{\cos^3 x + \cos^3 y} = \sqrt{3} \\ 3\operatorname{tg}^2 \dfrac{x - y}{2} = 1 \end{cases}$$

S-LT IOAN C. SAVIN

Plecăm de la identitatea:

$$u^3 + v^3 = (u + v)[(u + v)^2 - 3uv],$$

unde dacă se ţine seamă că,

$$uv = \frac{(u + v)^2 - (u - v)^2}{4},$$

ea devine:

$$(1) \qquad u^3 + v^3 = (u + v) \cdot \frac{(u + v)^2 + 3(u - v)^2}{4}.$$

Dacă în (1) facem,

$$u = \sin x, \qquad v = \sin y,$$

avem:

$$(2) \qquad \sin^3 x + \sin^3 y = (\sin x + \sin y) \times \frac{(\sin x + \sin y)^2 + 3(\sin x - \sin y)^2}{4}.$$

Dacă ţinem seamă de formulele cunoscute,

$$\sin x + \sin y = 2 \sin \frac{x + y}{2} \cos \frac{x - y}{2}$$

$$\sin x - \sin y = 2 \sin \frac{x - y}{2} \cos \frac{x + y}{2},$$

relaţia (2) se mai poate scri succesiv:

$$(3) \qquad \sin^3 + \sin^3 y = 2 \sin \frac{x + y}{2} \cos \frac{x - y}{2} \times \left(\sin^2 \frac{x + y}{2} \cos^2 \frac{x - y}{2} + 3 \sin^2 \frac{x - y}{2} \cos^2 \frac{x + y}{3}\right) =$$

$$2 \sin^3 \frac{x + y}{2} \cos^3 \frac{x - y}{2} \left(1 + 3 \operatorname{tg}^2 \frac{x - y}{2} \operatorname{cotg}^2 \frac{x + y}{2}\right)$$

De asemeni, dacă în (1) facem,

$$u = \cos x, \qquad v = \cos y,$$

avem:

$$(4) \qquad \cos^3 x + \cos^3 y = (\cos x + \cos y) \times \frac{(\cos x + \cos y)^2 + 3(\cos x - \cos y)^2}{4}.$$

Dacă ţinem seamă de formulele cunoscute:

$$\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x + y}{y} \cos \frac{x - y}{2}$$

$$\cos x - \cos y = -2 \sin \frac{x + y}{2} \sin \frac{x - y}{2},$$

relaţia (4) se mai poate scri succesiv:

$$(5) \qquad \cos^3 x + \cos^3 y = 2 \cos \frac{x + y}{2} \cos \frac{x - y}{2} \times \left(\cos^2 \frac{x + y}{2} \cos^2 \frac{x - y}{2} + 3 \sin^2 \frac{x + y}{2} \sin^2 \frac{x - y}{2}\right) =$$

$$2 \cos^3 \frac{x + y}{2} \cos^3 \frac{x - y}{2} \left(1 + 3 \operatorname{tg}^2 \frac{x + y}{2} \operatorname{tg}^2 \frac{x - y}{2}\right).$$

Inpărţind relaţia (3) cu (5), observăm că sistemul dat devine:

$$\begin{cases} \operatorname{tg}^3 \dfrac{x + y}{2} \cdot \dfrac{1 + 3 \operatorname{tg}^2 \dfrac{x - y}{2} \operatorname{cotg}^2 \dfrac{x + y}{2}}{1 + 3 \operatorname{tg}^2 \dfrac{x - y}{2} \operatorname{tg}^2 \dfrac{x + y}{2}} = \sqrt{3} \\ 3 \operatorname{tg}^2 \dfrac{x - y}{2} = 1. \end{cases}$$

Acest sistem se mai poate scri ţinând seama de ecuaţia 2-a:

$$(6)\quad \begin{cases} \operatorname{tg}^3\dfrac{x+y}{2}\cdot\dfrac{1+\operatorname{cotg}^2\dfrac{x+y}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\dfrac{x+y}{2}}=\sqrt{3} \\ 3\operatorname{tg}^2\dfrac{x-y}{2}=1. \end{cases}$$

Este uşor de văzut că sistemul (6) la rândul său este echivalent cu următorul:

$$(7)\quad \begin{cases} \operatorname{tg}\dfrac{x+y}{2}=\sqrt{3}=\operatorname{tg}(k\pi+60^0) \\ \operatorname{tg}\dfrac{x-y}{2}=\dfrac{1}{\pm\sqrt{3}}=\operatorname{tg}(k_1\pi\pm 30^0), \end{cases}$$

unde $(k,\ k_1=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ldots)$.

Din (7) deducem:

$$\begin{cases} \dfrac{x+y}{2}=k\pi+60^0 \\ \dfrac{x-y}{2}=k_1\pi\pm 30^0. \end{cases}$$

Prin adunare şi scădere obţinem pentru sistemul dat următoarele sisteme de soluţii

$$\begin{cases} x=(k+k_1)\pi+60^0\pm 30^0 \\ y=(k-k_1)\pi+60^0\mp 30^0, \end{cases}\quad (k,k_1=0,\pm 1,\pm 2,\ldots).$$

Soluţii obţinute prin calcule mai lungi, date de d-nii: *Andrunachievici Vl.* (Chişinău), *Babeţiu C. I.* (lic. Loga Timişoara), *Kornis Ernest* (lic. Loga, Timişoara), *Matei D. D-tru*, *Murgu V. Marţian* (lic. Beiuş), *Negrea A. Leonte-Mircea* (Brăila) şi *Tilică C. Ştefan*.

1562. — *Să se afle patratele perfecte a două numere consecutive, a căror diferenţă este un patrat perfect de două cifre.*

C-TIN JIDANU

Fie n şi $n+1$ două numere consecutive.

Diferenţa patratelor lor este:

$$(n+1)^2-n^2=2n+1.$$

$2n+1$, care este un număr impar, trebue conform enunţului să fie patrat perfect de două cifre. Cum patratele impare de două cifre sunt,

$$25,\quad 49,\quad 81,$$

urmează că $2n+1$ este, 25, 49 sau 81, adică $n=12$, 24 sau 40.

Patratele consecutive de două cifre, care satisfac enunţul sunt astfel:

$$13^2=169\qquad 25^2=625\qquad 41^2=1681$$
$$12^2=144,\qquad 24^2=576,\qquad 40^2=1600$$

Soluţii date de d-ra: *Comloşan Cornelia* (studentă, Cluj) şi de d-nii: *Aman V. C-tin*, *Anastasescu M. Mihail* (lic. Milit, N. Filipescu), *Begu I. Ştefan*, *Berinde L. Titus* (Şc Polit, Timişoara), *Buznea Dinu*, *Cetăţeanu Stelian* (lic. Şincai, Bucureşti), *Cioc I. D-tru* (lic. Milit, Craiova), *Dăscălescu Şt. Hristache* (Focşani), *Djebcu Leonide* (profesor, Bălţi), *Enache Ion* (lic. Milit., Tg-Mureş), *Florescu Victor*, *Matei D. D-tru*, *Murgu V. Marţian* (Şc. Polit, Timişoara), *Lupescu Corneliu* (Sub-Lt), *Popoviciu Gabriel*, *Rădulescu Octavian*, *Reicher L. Herman* (lic. Internat, Iaşi), *Ripianu Andrei* (lic Braşov), *Rosenblatt S. Millu* (lic. Internat, Iaşi), *Săruleşteanu I. Emanoil* (lic. Spiru Haret, Bucureşti), *Selmereanu Horia*, *Solomon I. Isac*, *Stamate I. Ionel* (lic. Lugoj), *Ştefănescu D. Nicolae* (lic. Milit, N Filipescu), *Theodorescu N. Dorin* (lic. Milit., N. Filipescu), *Tica P. Marin-Gall* (Sub-Lt), *Tilică C. Ştefan* (lic. T-Severin) şi *Vlad I. C. Mihail* (Locot.)

Observare. D-l *Dăscălescu Şt. Hristache* (Focşani). *a găsit şi următoarele patrate consecutive, a căror diferenţă este un patrat de trei cifre:*

$$\begin{cases} 61^2=3721 \\ 60^2=3600, \end{cases}\quad \begin{cases} 85^2=7225 \\ 84^2=7056, \end{cases}\quad \begin{cases} 113^2=12769 \\ 112^2=12544, \end{cases}$$

$$\begin{cases} 145^2=21025 \\ 144^2=20736, \end{cases}\quad \begin{cases} 181^2=32761 \\ 180^2=32400, \end{cases}\quad \begin{cases} 221^2=48841 \\ 220^2=48400, \end{cases}$$

$$\begin{cases} 265^2=70225 \\ 264^2=69696, \end{cases}\quad \begin{cases} 313^2=97969 \\ 312^2=97344, \end{cases}\quad \begin{cases} 365^2=133225 \\ 364^2=132496, \end{cases}$$

$$\begin{cases} 421^2=177241, \\ 420^2=176400, \end{cases}\quad \begin{cases} 481^2=231361 \\ 480^2=230400. \end{cases}$$

1572. — *Vârsta mea este de 7 ori mai mare ca a unui nepot. Peste câţi ani, voiu fi de cinci ori, de patru ori şi de trei ori mai mare, ştiind că suma diferenţelor de vârstă este egală cu 14? Care sunt vârstele actuale?*

SUB-LT. MARIN P. TICA-GALL

Fie, x şi $7x$ vârstele actuale, iar diferenţele de vârstă menţionate în enunţ fie y, z, u.

Conform enunţului putem scri:

$$\begin{cases} 7x+y=5(x+y) \\ 7x+z=4(x+z) \\ 7x+u=3(x+u) \\ y+z+u=14 \end{cases}\quad \text{sau:}\ (1)\ \begin{cases} x-2y=0 \\ x-z=0 \\ 2x-u=0 \\ y+z+u=14. \end{cases}$$

Din primele trei ecuaţii din (1) deducem,

(2) $\quad y=\frac{x}{2}, \qquad z=x, \qquad u=2x,$

valori, pe care introducându-le în a 4-a ecuaţie din (1), ne dă:

$$\frac{x}{2}+x+2x=14,$$

de unde:

$$x=4$$

şi atunci din (2) avem:

$$y=2, \qquad z=4, \qquad u=8.$$

Vârstele actuale a nepotului şi a autorului problemei, sunt deci: 4 şi 28.

Soluţii date de d-nii: *Aman V. C-tin* (Şc. Polit, Timişoara), *Anastasescu M. Mihail* (lic. Ploeşti), *Andrunachievici Vladimir* (student, Iaşi), *Apostol Radu*, *Brădeanu Nicolae*, *Begu I. Ştefan*, *Berinde L. Titus* (Şc. Polit, Timişoara), *Buznea Dinu* (lic. Milit., N. Filipescu), *Cristescu Dan*, *Czijak Vasile* (lic. Bistriţa), *Deciulescu Gheorghe* (lic. Buzău), *Jidanu C-tin*, *Kornis Ernest* (lic. Loga, Timişoara), *Lupescu Corneliu*, *Matei D-tru*, *Murgu V. Marţian* (Şc. Polit, Timişoara), *Popescu Adrian*, *Reicher L. H.* (lic. Internat, Iaşi), *Solomon I. Isac*, *Stoenescu D. Mirel* şi *Vlad I. C. M.*

1573. — *Să se rezolve sistemul:*

$$\begin{cases} x^2(1-y^2)+y(y+2x)=a \\ x^2y+xy^2=b \end{cases}$$

MARCEL F. AMARASTEANU

Sistemul dat se mai poate scri:

(1) $$\begin{cases} (x+y)^2-x^2y^2=a \\ xy(x+y)=b. \end{cases}$$

Din ecuaţia 2-a scoatem:

(2) $$xy=\frac{b^2}{x+y},$$

astfel că prima ecuaţie din (1) devine

$$(x+y)^2-\frac{b}{(x+y)^2}=a$$

$$(x+y)^4-a(x+y)^2-b^2=0,$$

căci $x+y\neq 0$, pentru $b\neq 0$.

Rezolvind această ecuaţie bipatrată în $(x+y)$, găsim:

(3) $$x+y=\pm\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2+4b^2}}{2}}=A_i, \quad (i=1,2,3,4)$$

unde $A_i (i=1,2,3,4)$ înseamnă cele patru valori ale lui $x+y$, din relaţia (3).

Inlocuind în (2) valorile lui $x+y$ găsite în (3), avem:

(4) $$xy=\frac{b}{A_i}, \qquad (i=1,2,3,4).$$

Relaţiile (3) şi (4) dau suma şi produsul lui x şi y, astfel că x şi y sunt rădăcinele ecuaţiei de gradul al 2-lea:

$$z^2-A_i z+\frac{b}{A_i}=0, \qquad (i=1,2,3,4)$$

sau:

$$A_i^2 z^2-A_i^2 z+b=0,$$

de unde urmează:

$$\begin{cases} x=\dfrac{A_i^2+\sqrt{A_i^2-4bA_i}}{2A_i} \\ y=\dfrac{A_i^2-\sqrt{A_i^2-4bA_i}}{2A_i} \end{cases}$$

sau:

$$\begin{cases} x=\dfrac{A_i^2-\sqrt{A_i^2-4bA_i}}{2A_i} \\ y=\dfrac{A_i^2+\sqrt{A_i^2-4bA_i}}{2A_i} \end{cases}$$

$(i=1,2,3,4).$

Soluţii date de d-nii: *Aman V. C-tin* (Şc. Polit., Timişoara), *Anastasescu M. Mihail*, *Apostol Radu*, *Berinde Titus* (Şc. Polit., Timişoara), *Buznea Dinu*, *Cioc I. D-tru* (lic. Milit., Craiova), *Dăscălescu Şt. Hristache* (Focşani), *Florescu Victor* (lic. Milit, N. Filipescu), *Jidanu I. C-tin* (lic. Beiuş), *Kornis Ernest* (lic. Loga, Timişoara), *Lupescu Corneliu* (Sub-Lt, Roman), *Matei D. D-tru* (lic. Internat, Iaşi), *Milu I. Nicolae* (Constanţa), *Murgu V. Marţian* (Şc. Polit., Timişoara), *Popescu Adrian*, *Popoviciu Gabriel* (Şc. Polit., Bucureşti), *Popoviciu Mircea* (lic. Lugoj), *Rădulascu Gh. Octavian* (lic. Milit., N. Filipescu), *Reicher L. H.* (lic. Internat, Iaşi), *Rosemblatt S. Millu* (lic. Internat, Iaşi), *Serbulescu A. C.* (lic. Spiru Haret, Bucureşti), *Solomon I. Isac* (lic. Internat, Iaşi), *Stamate I. Ionel* (lic. Lugoj) şi *Tilică C. Ştefan* (lic. T-Severin).

Observare. Dacă $b=0$ şi $a\neq 0$, avem sistemul de soluţii: $x=-y=\sqrt[4]{-a}$; iar dacă $b=0$, $a=0$, avem sistemul de soluţii: $x=y=0$.

1578. — *Să se arate că expresiunea:*

$$E=1407^{4(n+1)}+9^n\times 469^{2n+1}\times(27\times 469^2+3)+1,$$

este divizibilă prin 1936, oricare ar fi n întreg.

D-TRU D. MATEI

Expresiunea propusă se poate scri succesiv:

$$E=1407^{4(n+1)}+3^{2n+3}\times 469^{2n+3}+3^{2n+1}\times 469^{2n+1}+1$$

$$=1407^{4(n+1)}+1407^{2n+3}+1407^{2n+1}+1,$$

sau:

(1) $$E=(1407^{2n+3}+1)(1407^{2n+1}+1).$$

Trebue să arătăm că E este divizibil prin $1936=44^2$.

Observăm însă că:

$$1407=1408-1=44\times 32-1=\text{mult. } 44-1.$$

Folosind această relaţie, expresia (1), devine succesiv:

$$E=[(\text{mult. } 44-1)^{2n+3}+1][\text{mult. } 44-1^{2n+1}+1]$$

$$=\text{mult. } 44\times\text{mult. } 44=\text{mult. } 44^2=\text{mult. } 1936,$$

ceea-ce trebuia dovedit.

Soluţii date de d-nii: *Andrunachievici Al. Vladimir* (student, Iaşi), *Berinde Titus* (bacalaureat), *Dăscălescu St. Hristache* (Focşani), *Murgu V. Marţian* (Şc. Polit., Timişoara), *Popoviciu Gabriel* (Şc. Polit, Bucureşti), *Ripianu Andrei, Segal Zigu* (lic. Vaslui) şi *Tilică C Ştefan* (lic. T-Severin).

PROBLEME PROPUSE

1641. — Să se calculeze suma de n termeni,

$$S=12+3142+531642+\cdots,$$

în baza $x>2n$.

G L Gh. Buicliu

1642. — Să se demonstreze că expresiunile:

$$471^{1238}+36804^{1234567890},$$

$3364\times 58^{4p}-116\times 58^{2p}+7$, ($p$ întreg şi pozitiv), divizate prima prin 19 şi a 2-a prin 19^2 dau acelaşi rest.

Marcel F. Amarasteanu

1643. — Să se rezolve ecuaţia:

$$\prod_{k=2}^{6}(x^2+k)=12x^6+60x^4.$$

Sub-Lt Mircea Grumazescu

1644. — Să se rezolve în numere întregi ecuaţia:

$$2x^2-3xy+2y^2=u^2.$$

A. Gloden

1645. — Intr'un tetraedru isoscel să se demonstreze că:

1°. Patratul diametrului sferei circumscrise este egală cu suma patratelor bimedianelor.

2°. Produsul bimedianelor este egal cu de trei ori volumul tetraedrului.

(Bimediane sunt dreptele care unesc mijloacele laturilor opuse.)

V. Thébault

1646. — Dacă într'un triunghiu oarecare A B C, unim punctele unde cercurile exînscrise ating laturile, se formează triunghiul A' B' C'. Dacă a, b, c sunt laturile, h_a, h_b, h_c înălţimele triunghiului A B C, iar a', b', c' laturile triunghiului A' B' C', să se arate că avem:

$$a'=\sqrt{a^2-h_b h_c},\qquad b'=\sqrt{b^2-h_c h_a},$$

$$c'=\sqrt{c^2-h_a h_b}.$$

Sub Lt Adrian Popescu

1647. — Intr'un triunghiu dreptunghiu, avem relaţiile:

$$a^3=-b^3\sin 3B+c^3\cos 3B+3abc\sin 2B$$

$$0=b^3\cos 3B+c^3\sin 3B-3abc\cos 2B.$$

N. N Mihaileanu

1648. — Se dă triunghiul A B C cu laturile a, b, c. Se construesc apoi trei triunghiuri dreptunghice, având respectiv catetele: $a, b+c$; $b, c+a$; $c, a+b$ şi în care se notează cu α, β, γ unghiurile ce se opun respectiv catetelor a, b, c.

1°. Să se stabilească relaţia:

$$\operatorname{tg}(45^\circ-\alpha)+\operatorname{tg}(45^\circ-\beta)+\operatorname{tg}(45^\circ-\gamma)=1.$$

2°. Să se deducă din această identitate, relaţia cunoscută într'un triunghiu A B C:

$$\sum \operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}=1.$$

V. Alaci

Observare. In problema 1640 din numărul trecut, după cuvintele „*astfel ca*“ să se adaoge următorul rând omis:

„B E = A B + A C. *Să determină apoi punctul* D *pe* A B *astfel ca*“.

Se va întregi astfel problema.

Manuscrise primite de la corespondenții noștrii până la 10 a lunei curente și anume: Articole (A), Note (N), probleme propuse (P) și probleme rezolvate indicate prin numărul lor de ordine.

Anastasescu M. Mihail (1625, 1638); *Bădeanu Nicolae* (P., 1625, 1626); *Buznea D. Dinu* (P., 1465, 1470, 1559, 1569, 1590, 1592, 1601, 1617, 1623); *Cetăteanu Stelian* (P, 1567, 1571, 1574, 1579, 1580, 1583, 1587, 1592, 1597, 1599, 1601, 1602, 1606, 1608, 1611, 1614, 1616, 1620, 1623, 1625); *Cioc I. D-tru* (1466, 1474, 1587, 1598); *Drăgulescu Gheorghe* (1611); *Enache Ioan* (1574, 1625), *Jidanu I. C-tin* (P.); *Lupescu Corneliu* (1577, 1580, 1581, 1583, 1592, 1597), *Malaxa N. C.* (1574); *Milu I. Nicolae* (1574, 1585, 1591, 1592, 1614, 1616, 1620, 1625); *Popoviciu Mircea* (1574, 1580, 1587, 1592, 1597, 1598, 1599, 1616, 1620); *Reicher L. Herman* (P., 1570, 1571, 1579, 1580, 1584, 1585, 1586, 1587, 1591, 1592, 1598, 1599, 1601, 1603, 1608, 1611, 1616, 1620, 1625, 1626); *Roth I. Alexandru*, (1574, 1620, 1625, 1626); *Şandor Vasile* (1585, 1599, 1601, 1603, 1608, 1625); *Săruleşteanu I. Emanoil* (1516); *Solomon I. Isac* (P., 1565, 1574, 1597, 1614, 1625, 1626); *Stamate I. Ionel* (P., 1601, 1608, 1616); *Tilică C. Ştefan* (P., 1595, 1601, 1625, 1630); *Vişa Eugeniu* (A.); *Vlad I. C. Mihai* (P); *Voicu I. Aurelian* (1599); *Zigu Segal* (1599, 1606, 1620, 1625, 1631, 1638).

INFORMAȚIUNI

La Redacțiunea „Revistei Matematice din Timișoara" se primesc abonamente pentru:

BOLETIN MATEMATICO

ANUL AL X-LEA

care a început în Martie 1937.

Costul *special* a unui abonament este de 200 lei.

Această Revistă se publică în Buenos-Aires, Republica Argentina.

Pentru anul al X-lea care a începe în Martie 1937, s'au primit până acum la Redacția „R. M. T." următoarele abonamente:

1. Locotenent *Costăchescu Constantin,* Distrugătorul *„Regina Maria"*, Constanța.
2. Profesor *I. Nemet,* Casa învățătorilor, str. Remus, Timișoara.
3. *Teofil Vescan,* Calea Regele Ferdinand No. 110, Cluj.
4. Profesor *Spiridon Ghițescu,* liceul de băeți din Mizil.
5. Student *Nichita Bododea,* Bulevardul Al. I. Cuza No. 27, București.
6. Prof. *Sergescu P.,* Universitatea, Cluj.

Răspundem pe această cale, la toți acei corespondenții, care se plâng că anumite probleme nu le-au fost considerate, că aceasta se datorește sau faptului că acele soluțiuni au sosit întârziate, sau au fost greșite, sau n'au sosit de loc.

Evident că astfel de probleme nu pot fi luate, în seamă.

Fiecare problemă rezolvată trebuie să fie scrisă aparte și să nu se continue cu alte probleme, căci nu se pot repartiza la numerile corespunzătoare, deci nu pot fi luate în seamă.

SPHINX

Revue mensuelle des questions récréatives

FONDÉE EN 1931

REVUE UNIQUE DANS SON GENRE
dans le monde entier

ABONNEMENTS :
1 an : Belgique, **30 fr.** France, **25** fr.
Etranger, 7 **belgas**

Administration :
SPHINX, Bruxelles 173, Avenue Longchamp

Toți cei ce ne trimet articole, note, probleme propuse sau rezolvate, pentru a fi luate în considerație, sunt obligați a fi abonați la Revista Matematică din Timișoara.

Anunțăm că nu vom mai lua în considerare problemele rezolvate, iscălite de mai mulți corespondenți. Fiecare corespondent trebue să-și redacteze problema rezolvată de el, și s'o iscălească.

Legându-se colecția R. M. T., anul XV, în volum și rămânând numere răzlețe care nu au putut fi legate, putem trimete corespondenților noștri numere care eventual le lipsesc din colecție în schimbul sumei de 10 lei. Doritorii se vor adresa administrației revistei, trimițând suma prin mandat poștal.

ANUL XVII. 15 FEBRUARIE 1938 No. 12.

REVISTA MATEMATICĂ

DIN

TIMIȘOARA

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA APARE ODATA PE LUNA.
PREȚUL UNUI NUMAR 12 LEI PREȚUL ABONAMENTULUI 100 LEI PE AN.

CUPRINSUL

1 **GH. CONSTANTINESCU:** DESCOMPUNEREA UNUI PATRAT IN O SUMA DE PATRATE PERFECTE.

2. NOTE MATEMATICE: 27, 28.

3 BIBLIOGRAFIE.

4. PROBLEME REZOLVATE: 336, 507, 1556, 1565, 1576, 1579, 1580.

5. PROBLEME PROPUSE: 1649-1657.

6 TABLA DE MATERII.

7. INFORMATIUNI

TIMISOARA
Institut de Arte grafice Tipografia Românească

„Orice profesor de matematici, din orice colţ al ţării şi de la orice şcoală, trebuie să fie apostol al specialităţii sale. Din felul cald şi luminos cum îşi face lecţiile, din drumul drept şi demn pe care îl urmează în viaţă, trebuie să apară limpede că judecata matematică precisă şi sigură, curată ca cristalul, are o înaltă şi admirabilă valoare educativă pentru viaţă.

Adevărul curat, adevărul drept, adevărul luminos, să fie îndreptarul vieţei noastre. Aceasta să fie contribuţia specialităţii noastre la îndrumarea neamului românesc, pe calea care-i stă deschisă".

G. ŢIŢEICA

In luna Martie c. se va publica lista d-lor membrii a-i „R. M. T." cu titlurile şi ocupaţiile fiecăruia. In acest scop rugăm pe d-nii membrii a ne trimete schimbările şi complectările necesare.

Manuscrisele destinate Revistei Matematice din Timişoara conţinând soluţiunile problemelor propuse şi probleme, note sau articole originale vor fi trimise pe adresa: **V. Alaci,** profesor Şcoala Politechnică, Timişoara.

Plata abonamentului precum şi reclamaţiunile de neprimirea Revistei vor fi adresate d-lui **Prof. C. Teodorescu,** Rectorul Şcoalei Politechnice din Timişoara.

Plata abonamentului se face prin CEC (Casa de economii şi cecuri postale) unde revista are contul CEC No. 85208, sau prin mandat postal adresat d-lui Prof. C. TEODORESCU, Rectorul Şcoalei Politechnice din Timişoara.

Taxa de Membru în „Comitetul de Conducere al Revistei Matematice din Timişoara" este pentru anul XVII, de 200 (două sute) lei.

Colecţia R. M. T., se găseşte la Administraţia Revistei, şi se poate procura în schimbul preţului:

Anul I, epuizat. Anii: II—XVII inclusiv, broşate, 120 lei fiecare.

ANUL XVII — No. 12 TIMISOARA, 15 FEBRUARIE 1938

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA

APARE LA 15 A FIECAREI LUNI

PREŢUL UNUI NUMAR . . . . . 12 LEI
ABONAMENT ANUAL . . . . . 100 LEI
Abonamentele sunt socotite totdeauna dela 15 Martie

REDACŢIA: Prof. V. ALACI
Şcoala Politechnică din Timişoara.
ADMINISTRAŢIA: Prof. C. TEODORESCU
Rectorul Şcoalei Politechnice din Timişoara.

DESCOMPUNEREA UNUI PATRAT IN O SUMĂ DE PATRATE PERFECTE

De

PROF. GH. CONSTANTINESCU

A descompune un patrat perfect în o sumă de mai multe patrate perfecte este o chestiune uşoară, dar care poate da naştere la chestiuni foarte complicate de teoria numerilor.

Vom deosebi două părţi:

1. Vom descompune un patrat în o sumă de mai multe patrate.

2. Vom rezolva în numere întregi ecuaţiunea:

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = u^2.$$

I. Pentru a descompune un patrat în o sumă de patrate perfecte, vom lua la început un patrat perfect şi să-l descompunem în o sumă de două patrate. Se ştie că acest patrat trebue să îndeplinească următoarea condiţiune. Să fie compus din factori primi de forma $4m+1$, şi dacă mai cuprinde şi alţi factori, trebue să fie toţi la puteri pare.

Odată această condiţiune fiind satisfăcută, vom lua fiecare factor prim de forma $4m+1$ şi prin încercări îl vom descompune în o sumă de două patrate perfecte:

$$p_1^2 = m_1^2 + n_1^2$$

şi din identitatea următoare:

$$(m_1^2 + n_1^2)^2 = p_1^2 = (m_1^2 - n_1^2) + (2 m_1 n_1)^2,$$

avem descompus pe p_1^2 în o sumă de două patrate perfecte, apoi produsul $p_1^2 p_2^2 \ldots p_k^2$ al factorilor de forma $4m+1$ îl vom pune sub forma sumei a două patrate perfecte în modul cum am arătat în R. M. T., anul XVI, No. 9 şi apoi această sumă de două patrate perfecte, o inmulţim cu produsul factorilor de forma $4m-1$, cari sunt la puteri pare şi astfel punem patratul dat sub forma a sumei a două patrate perfecte.

Pentru a descompune acum un patrat în o sumă de 3 patrate şi chiar mai multe patrate perfecte vom proceda în modul următor:

Pe lângă patratul dat u^2, vom lua un alt patrat $v^2 < u^2$, astfel ca atât numărul $u+v$ cât şi $u-v$ să nu cuprindă decât factori primi de forma $4m+1$ şi dacă cuprinde şi alţi factori, aceştia să fie la puteri pare.

Odată găsit acest patrat v^2 descompunem după cum am arătat pe $(u+v)(u-v)$ în o sumă de două patrate perfecte r^2+s^2 şi astfel avem:

$$u^2 = v^2 + r^2 + s^2,$$

unde u^2 este descompus în o sumă de 3 patrate perfecte.

Procedăm în acelaş mod cu v^2, r^2 şi s^2 descompunându-i în o sumă de două sau trei patrate perfecte şi vom avea un patrat perfect descompus în o sumă de mai multe patrate perfecte. Exemplu. Să luăm numărul $u^2 = 31^2$.

Patrate mai mici ca 31^2 şi cari să satisfacă condiţiunea ca $(u+v)(u-v)$ să se descompună în o sumă de două patrate perfecte sunt:

$$v^2 = 30^2,\ 27^2,\ 22^2,\ 18^2,\ 14^2,\ 5^2,$$

cari dau următoarele soluţiuni:

$$31^2 = 30^2 + 6^2 + 5^2,$$
$$31^2 = 27^2 + 14^2 + 6^2,$$
$$31^2 = 22^2 + 21^2 + 6^2,$$
$$31^2 = 18^2 + 21^2 + 14^2.$$

Patratele 14^2 şi 5^2 nu dau soluţiuni diferite de cele de mai sus.

Dacă procedăm în acelaş mod cu patratele în care se descompune 31^2, vom avea de exemplu:

$$31^2 = 27^2 + 14^2 + 6^2,$$
$$27^2 = 26^2 + 7^2 + 2^2,$$
$$26^2 = 24^2 + 10^2$$

şi prin adunare vom găsi:

$$31^2 = 24^2 + 14^2 + 10^2 + 7^2 + 6^2 + 2^2$$

şi astfel avem patratul 31^2 descompus în o sumă de 6 patrate perfecte.

II. Rezolvarea ecuaţiunei:

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = u^2$$

se face în modul arătat de mine în „G. M.“, anul XXXVII, pag. 202, iar acum pentru că voiesc să arât cum se găsesc soluţiuni în mod practic, vom observa că dacă dau celor $n-1$ necunoscute valori arbitrare, găsim că $x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{n-1}^2$ ne dă un număr N, care se pune intotdeauna sub forma a diferenţei a două patrate perfecte, afară de cazul când N este de forma $N = 2(2k+1)$. Rezultă deci că în valorile arbitrare date celor $n-1$ necunoscute, să nu dăm la un număr de $4k+2$ necunoscute, valori impare.

In modul acesta se găsesc orcâte soluţiuni ale ecuaţiunei date.

Să luăm exemplu $x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{10}^2 = u^2$.

Dăm de exemplu necunoscutelor x_1, $x_2 \ldots x_9$, 9 valori consecutive 1, 2, 3 . . . 9 şi astfel găsim $x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_9^2 = 285$, la care corespund următoarele valori:

$1^2+2^2+3^2+4^2+5^2+6^2+7^2+8^2+9^2+142^2=143^2$,

$1^2+2^2+3^2+4^2+5^2+6^2+7^2+8^2+9^2+46^2=49^2$,

$1^2+2^2+3^2+4^2+5^2+6^2+7^2+8^2+9^2+26^2=31^2$,

$1^2+2^2+3^2+4^2+5^2+6^2+7^2+8^2+9^2+2^2=17^2$.

Din modul cum am rezolvat această ecuaţiune, unde la $n-1$ necunoscute am dat valori arbitrare şi cari ar putea fi în progresie aritmetică, se naşte o altă interesantă problemă.

Descompunerea unui patrat perfect în o sumă de patrate a unor numere în progresie aritmetică.

Vom deosebi două cazuri după cum numărul patratelor este impar sau par.

1. In cazul când numărul patratelor este impar şi raţia este a, vom avea:

$$(y-na)^2 + \cdots + (y-a)^2 + y^2 + (y+a)^2 \ldots (y+na)^2 =$$

sau

$$x^2 - (2n+1)y^2 = \frac{(2n+1).n.(n+1)}{3} a^2.$$

Rezolvarea acestei ecuaţiuni ne va da soluţiun cerute, însă pentru ce valori ale lui n, ecuaţia mai sus are sau nu soluţiuni este o chestiune c cere cunoştinţe serioase de teoria formelor pat tice şi chiar în acest caz nu se poate spune general pentru ce valori ale lui n are sau ecuaţia dată soluţiuni; ci trebue să cercetăm fiecare caz în parte. Cu toate acestea sunt caz când sunt soluţiuni generale şi anume atunci că $2n+1 = (2p+1)^2$.

Ecuaţia de mai sus în acest caz se poate sc sub forma

$$x^2 - (2p+1)^2 y^2 =$$
$$\frac{(2p+1)^2.2p.(p+1)}{a} \frac{(2p^2+2p+1)}{a} a^2$$

şi dacă $2p+1$ nu este un multiplu de 3, acea ecuaţiune are soluţiuni orcare ar fi a şi deci pat tele pot fi şi numere consecutive, iar în ca $2p+1$ multiplu de 3, trebue să avem pe $a =$ şi deci în acest caz raţia este un multiplu d şi nu putem să avem numere consecutive. Pen a găsi soluţiunile în acest caz când $2n+1$ este patrat perfect, nu avem decât să descompunem

$$\frac{2p(p+1)(2p^2+2p+1)}{3} a^2$$

în toate modurile posibile în produs de doi fact $u.v$ şi din ecuaţiile

$$x + (2p+1)y = (2p+1)u$$
$$x - (2p+1)y = (2p+1)v,$$

deducem

$$x = \frac{(2p+1)(u+v)}{2}, \qquad y = \frac{u-v}{2}.$$

Factorii u şi v trebue să fie de aceiaşi paritat în acest caz pentru că membrul al 2-lea este trebue ca u şi v să fie pari. Să luăm un exemp $2n+1 = 25$ şi să găsim toate soluţiunile c $a = 1$ şi apoi când $a = 21$.

In acest caz ecuaţia devine:

$$x^2 - 25y^2 = 25.4.13$$

u avem decât o singură descompunere

$$x - 5y = 10,$$

$$x + 5y = 130,$$ care dă $x = 70$ şi $y = 12$

ingura soluţie este:

$1^3+2^3+\cdots+11^3+12^3+13^3+\cdots+24^3=4900.$

acă această singură soluţie o înmulţim cu a^2, m soluţiuni de numere în progresii aritmetice aţia a, a căror sumă a patratelor este egală cu patrat perfect.

acest caz, toate patratele au un divizor co- a^2. Pentru a găsi patrate care să fie prime ele sau să aibă un divizor comun, care va vizorul comun şi al lui a^2, vom proceda în ul următor:

i luăm de exemplu $a = 21$.

escompunem numărul $4.13.21^2$ în toate mo- le posibile în produs de doi factori $u\,v$. Vom :

= 3822, 1638, 882, 1274, 234. 294, 546, 182

= 6, 14, 26, 18, 98, 78, 42, 126.

apoi din ecuaţiile:

$$x + 5y = 5u,$$

$$x - 5y = 5v,$$

n pentru x şi y următoarele valori:

570, 4130, 2270, 3230, 830, 930, 1470, 770.

908, 812, 428, 642, 78, 186, 252, 77.

ci când raţia este egală cu 21, avem 8 soluţiuni.

cazul general vom cerceta pentru ce valori ui n sunt soluţiuni şi anume ne vom mărgini la $n = 99$.

nt două condiţiuni necesare pe cari să le în- neasică a şi b pentru ca ecuaţia $x^2 - ay^2 = b$ ă soluţiuni.

Toţi factorii lui b, puterea întâi sau la puteri e, trebue să aibe pe a ca rezidiu patratic.

Toţi factori lui b la puterea întâi sau la puteri e, trebue să fie ei reziduri patratice ale lui a, acă nu sunt reziduri patratice, numărul acestor i trebue să fie par.

de exemplu ecuaţia:

$$x^2 - 13y^2 = 13.2.7$$

nu are soluţiuni întregi, pentru că 13 nu este un rezidiu patratic al lui 7. Aceasta se vede uşor, pentru că restul împărţirei lui 13 prin 7 este 6 şi toate patratele perfecte faţă de 7 nu sunt decât de forma $7m + 0, +1, +2, +4$. In acelaş mod se vede că ecuaţia

$$x^2 - 89y^2 = 89.44.3.5$$

nu are soluţiuni pentru că 89 nu este rezidiu patratic al lui 3. Apoi ecuaţia:

$$x^2 - 29y^2 = 29.2.5.7$$

nu are soluţii, deşi 29 este rezidiu patratic al numerilor 2, 5 şi 7, însă toate patratele perfecte sunt faţă de 29, numai de formele $29m + 1$, 4, 5, 7, 8, 9, 13, 16, 20, 22, 23, 24, 25, 28 şi deci 2 nu este rezidiu al lui 29 şi cum el este singur, urmează că ecuaţia nu are soluţiuni.

Cercetând în modul acesta toate ecuaţiunile până la $2n + 1 = 99$ găsim că numai următoarele ecuaţiuni au soluţiuni întregi:

$x^2 - 11y^2 = 110$, $x^2 - 47y^2 = 47.23.8$,

$x^2 - 23y^2 = 23.11.4$, $x^2 - 59y^2 = 59.29.10$,

$x^2 - 33y^2 = 11.16.17$, $x^2 - 73y^2 = 72.12.37$,

$$x^2 - 97y^2 = 97.16.49.$$

Soluţiunile acestor ecuaţiuni le vom găsi în modul următor:

1°. *Ecuaţiunea* $x^2 - 11y^2 = 110$.

Se vede uşor că x trebue să fie de forma $x = 11m$ şi într'un articol trimis „G. M." am dovedit în mod riguros că soluţiunile reduse ale acestei ecuaţiuni se găsesc în intervalul:

$$\sqrt{110} < x < \frac{\sqrt{110(u+1)}}{2},$$ unde u este soluţia redusă a ecuaţiei $u^2 - 11v^2 = 1$. In acest caz u este egal cu 10, deci

$11 \leq x < 25$ şi cum x este de forma $x = 11m$ trebue să avem $1 \leq m \leq 2$. Prin urmare trebue să dăm lui m numai două valori, 1 şi 2 pentru a găsi soluţia redusă a ecuaţiei date şi astfel avem pentru $m = 1$, $x = 11$, $y = 1$.

Această soluţie cu ajutorul soluţiilor u, v ale ecuaţiunei $u^2 - 11v^2 = 1$, ne dă două şiruri recurente de soluţiuni:

$x = 11$, 143, 2849, 56837,

$y = 1$, 43, 859, 17137,

$$x = 77,\ 1529,\ 30503,$$
$$y = 23,\ 461,\ 9197.$$

Prima soluţie $x = 11$ şi $y = 1$ trebue eliminată pentru că ne dă pentru y valori negative de cari nu s'a ţinut seamă în tratarea problemei.

Urmează că cea mai mică soluţie pentru $n = 11$ este:

$$18^2 + 19^2 + 20^2 + 21^2 + 22^2 + 23^2 + 24^2 + 25^2 + 26^2 + 27^2 + 28^2 = 77^2.$$

Toate aceste soluţii găsite pentru $n = 11$, dacă le înmulţim cu a^2 găsim alte soluţii, unde numerile sunt în progresie aritmetică cu raţia a.

Dacă raţia a este în aşa mod aleasă astfel ca ecuaţia $x^2 - 11y^2 = a^2$ să aibă soluţiuni proprii, cum de exemplu este $a^2 = 5^2, 7^2 \ldots$ unde avem:

$$6^2 - 11.1^2 = 5^2, \qquad 15^2 - 11\,4^2 = 7^2,$$

vom găsi şi soluţiuni prime între ele cu raţia a Prin inmulţirea egalităţilor

$$x'^2 - 11y'^2 = 11.2.5,$$
$$x''^2 - 11y''^2 = 5^2,$$

găsim

$$(x'^2 - 11y'^2)(x''^2 - 11y''^2) =$$
$$(x'x'' \pm 11y'y'')^2 - 11(x'y'' \pm y'x'')^2 = 11.2.5.5^2$$

şi în modul acesta găsim 11 numere în progresie aritmetică cu raţia 5 şi prime între ele, a căror sumă a patratelor să fie un patrat perfect.

In acelaşi mod găsim şi soluţiuni în progresie aritmetică cu raţia 7.

1. Exemplu: $x^2 - 59y^2 = 59.29.5.2 = 17110$. Am putea proceda la fel ca în cazul precedent, dar pentru că numărul 17110 este prea mare, descompunem ecuaţia în alte 3 ecuaţii:

$$1.\ x^2 - 59y^2 = 118, \qquad 2.\ x^2 - 59y^2 = 29,$$
$$3.\ x^2 - 59y^2 = 5,$$

cu cari procedăm ca la exemplu 1°. şi găsim că aceste trei ecuaţii au ca soluţii reduse pe:

$$(1) \qquad \begin{matrix} x' = 177, & x'' = 77, & x''' = 8, \\ y' = 23, & y'' = 10, & y''' = 1, \end{matrix}$$

apoi din identitatea

$$(x'^2 - 59y'^2)(x''^2 - 59y''^2) =$$
$$(x'x'' \pm 59y'y'')^2 - 59(x'y'' \pm y'x'')^2 = 118.29,$$

găsim că ecuaţia $x^2 - 59y^2 = 118.29$ are două soluţiuni reduse

$$\begin{matrix} x = 27199 \\ y = 3541 \end{matrix} \quad \text{şi} \quad \begin{matrix} x = 59 \\ y = 1. \end{matrix}$$

Soluţiunea $x = 27199$, $y = 3541$ nu este redusă căci din soluţia $x = 59$, $y = 1$ cu ajutorul lui u şi v găsesc şi această soluţie. Acum din identitatea:

$$(x^2 - 59y^2)(x'''^2 - 59y'''^2) =$$
$$(xx''' \pm 59yy'''^2 - 59(xy''' \pm yx'''^2 = 118.29.5,$$

găsim că ecuaţia $x^2 - 59y^2 = 118.29.5$ are două soluţiuni reduse:

$$\begin{matrix} x_1 = 413 \\ y_1 = 51 \end{matrix} \quad \text{şi} \quad \begin{matrix} x_2 = 531 \\ y_2 = 67. \end{matrix}$$

Cu aceste două soluţiuni reduse şi cu soluţiunile u şi v ale ecuaţiei $x^2 - 59y^2 = 1$, cari sunt:

$$\begin{matrix} 1, & 530 & 56179, \\ 0, & 69 & 7314, \end{matrix}$$

se găsesc următoarele 4 şiruri recurente, cari sunt soluţiunile căutate:

$$1.\ \begin{cases} x = 531 & 554187 \\ y = 67, & 72149. \end{cases}$$

$$2.\ \begin{cases} 8673 \\ 1129. \end{cases}$$

$$3.\ \begin{cases} 413 & 426511 \\ 51, & 55527. \end{cases}$$

$$4.\ \begin{cases} 11279 \\ 1467. \end{cases}$$

In acelaş mod se procedează şi pentru celelalte ecuaţiuni:

2. In cazul când n este par, vom pune patratele sub forma

$$[y - (n-1)a]^2 + \cdots (y-a)^2 + y^2 + (y+a)^2 + \cdots$$
$$\cdots + [y + (n-1)a]^2 + (y + na)^2 = u^2,$$

pe care o reducem la

$$2nv^2 - z^2 = \frac{4n^2 - 1}{3}a^2,$$

unde

$$u = nv \quad \text{şi} \quad 2y + a = z.$$

Procedăm cu această ecuaţiune la fel ca precedentele şi astfel găsim soluţiile şi în cazul când n este par.

NOTE MATEMATICE

27. — *A propos de la note mathématique 24. Rezolvarea unor ecuaţiuni diophantiene. R. M. T.* No. 11, page 126—27.

Je lis dans *R. Noguès*, Théorème de Fermat, son histoire, 1932, page 165:

„L. J. *Mordell*, 1929, résout ainsi l'équation

$$x^2 + y^2 = z^n,$$

on a $(x + y\,i)(x - y\,i) = z^n,$

d'où $x + y\,i = i^r (a + b\,i)^n,\quad x - y\,i = i^{-r} (a - b\,i)^n,$

$$z = a^2 + b^2,$$

a, b, entiers, r entier quelconque.[1]"

Par [1] l'auteur (*R. Noguès*) renvoie à une note qui se trouve en bas de la page 165:

[1] „Comme x, y peuvent être pris l'un pour l'autre et que leurs signes n'importent pas, on peut réduire les deux formules à une seule

$$x + y\,i = (a + b\,i)^n.$$

Les modules des deux membres étant égaux, on aura

$$x^2 + y^2 = (a^2 + b^2)^n.$$

Quant aux valeurs de x, y, z, ils sont

$$x = p^n - C_n^2 p^{n-2} q^2 + \cdots,\quad y = C_n^1 p^{n-1} q - \cdots$$

$$z = a^2 + b^2."$$

A. GLODEN

28. — *Résolution en nombres entiers de l'équation*

$$x^2 + x\,y + y^2 = 3\,z\,t.$$

1^er^ *procédé*: On peut poser

$$x = \xi + \eta,\quad y = \xi - \eta,\quad z = \zeta + \tau,\quad t = \zeta - \tau,$$

L'équation se transforme en la suivante:

$$3\,\xi^2 + \eta^2 = 3\,\zeta^2 - 3\,\tau^2.$$

Donc $\eta = 3\,\eta'$. On trouve ensuite

$$\xi^2 + 3\,\eta'^2 = \zeta^2 - \tau^2$$
$$\zeta^2 = \xi^2 + 3\,\eta'^2 + \tau^2.$$

$$\begin{cases} \zeta = m^2 + n^2 + 3\,p^2 + 3\,q^2 \\ \xi = m^2 - n^2 - 3\,p^2 + 3\,q^2 \\ \tau = 2\,m\,n - 6\,p\,q \\ \eta' = 2\,m\,p + 2\,n\,q;\quad \eta = 6\,(m\,p + n\,q) \end{cases}$$

$$\begin{cases} z = (m + n)^2 + 3\,(p - q)^2 \\ t = (m - n)^2 + 3\,(p + q)^2. \\ x = m^2 - n^2 - 3\,p^2 + 3\,q^2 + 6\,(m\,p + n\,q) \\ y = m^2 - n^2 - 3\,p^2 + 3\,q^2 - 6\,(m\,p + n\,q). \end{cases}$$

Exemples numériques.

$\alpha.$ $\quad m = 4,\quad n = 3,\quad p = 2,\quad q = 1.$

On trouve, après suppression du facteur commun

$$16^2 - 16 \cdot 17 + 17^2 = 3 \cdot 13 \cdot 7.$$

$\beta.$ $\quad m = 4,\quad n = 2,\quad p = 6,\quad q = 1.$

$$63^2 - 63 \cdot 249 + 249^2 = 3 \cdot 111 \cdot 151$$

2^e^ *procédé*: Posons

$$z = m^2 + m\,n + n^2;\quad t = p^2 + p\,q + q^2.$$

On a l'identité:

$$(m^2 + m\,n + n^2)(p^2 + p\,q + q^2) = r^2 + r\,s + s^2,$$

avec

(1) $\quad r = m\,p - n\,q;\quad s = n\,p + (m + n)\,q$

ou

(2) $\quad r = m\,q - n\,p;\quad s = n\,q + (m + n)\,p.$

Le nombre 3 est aussi de la forme

$$\xi^2 + \xi\,\eta + \eta^2 \text{ avec } \xi = 1,\ \eta = 1.$$

Si, dans les formules précédentes, on remplace m par r, n par s, puis p et q par ξ resp. η c'est-à-dire par la valeur 1, on trouve:

$$\begin{cases} x = r - s = m\,p - n\,q - n\,p - m\,q - n\,q = \\ \qquad (m - n)\,p - (m + 2\,n)\,q; \\ y = r + 2\,s = m\,p - n\,q + 2\,n\,p + 2\,m\,q + 2\,n\,q = \\ \qquad (m + 2\,n)\,p + (2\,m + n)\,q. \end{cases}$$

Les formules (2) pour r et s ne donnent pas de solution nouvelle.

Exemples numériques.

$\alpha.$ $\quad m = 2,\quad n = 1,\quad p = 3,\quad q = 2$

$$5^2 - 5 \cdot 22 + 22^2 = 3 \cdot 7 \cdot 19\ (= 399).$$

$\beta)$ $\quad m = 2,\quad n = 1,\quad p = 6,\quad q = 1$

$$2^2 + 2 \cdot 29 + 29^2 = 3 \cdot 7 \cdot 43\ (- 903).$$

N. On obtient facilement des solutions numériques de l'équation donnée. On peut prendre arbitrairement pour z

et t des nombres de la forme $\xi^2+\xi\eta+\eta^2$, ou plus simplement pour x et y des nombres de la forme $M\,3\pm1$, le signe étant le même pour x et y.

A. GLODEN

BIBLIOGRAFIE

1. *Gazeta Matematică*, anul XLIII, No. 5, Ianuarie 1938. † *Nicolae G. Botea*, de *C. Ionescu-Bujor*. O sărbătorire a d-lui *A. G. Ioachimescu*, de *I. Ionescu*, *Cr. Mateescu*. Aritmetica lui *Gh. Asachi* (urmare), de *V. Cazanacli*. Primele aritmetici pentru Bucovina, de *Victor Marian*. Probleme rezolvate şi propuse.

2. *Boletin Matematico*, anul X, No. 10, Decemvrie 1937, Buenos-Aires. Asupra unor integrale a lui *Euler*, de *S. Sispanov*. Asupra unor triunghiuri pitagorice (continuare), de *R. Noguera*. Probleme rezolvate şi propuse.

3. *Boletin Matematico*, anul X. No. 11, Decemvrie 1937, Buenos Aires. *Descartes*, creatorul Geometriei Analitice, de *Smith Bunge*.

4. *Ştiinţă şi Progres*, Revista ştiinţifică a liceelor militare, anul IV, N-rile 7-8, Ianuarie 1938. Pe marginea operei „Studii asupra Metodei", de Prof. *Eugen Russu*. Particularităţile atmosferei lui Venus, de *Spiridon Ghiţescu*. Concepţia relativistă a mecanicei, de Prof. *T. Vescan*. Probleme rezolvate şi propuse.

5. *Nicolae Caranfil*. Cum renunţăm anual la miliarde.

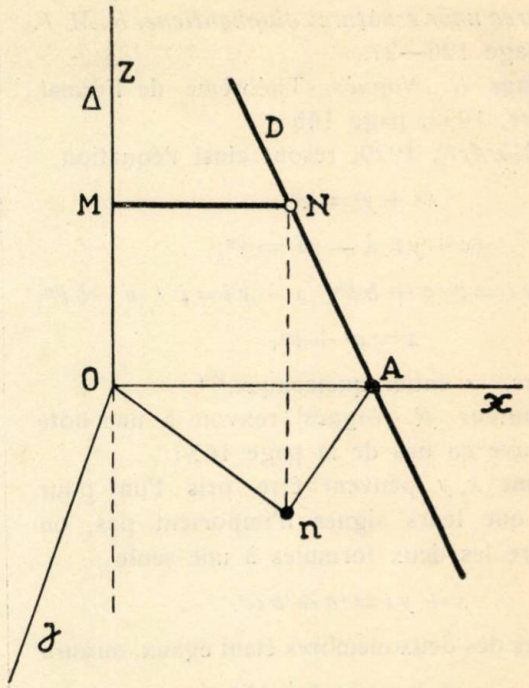
PROBLEME REZOLVATE

336. — *Se consideră în spaţiu două drepte, una fixă şi cealaltă mobilă în jurul unui punct al său. Se cere locul geometric, pe dreapta mobilă, al piciorului perpendicularei comune între cele două drepte.*

COL. F. IACOB

Soluţie geometrică. Fie Δ dreapta fixă şi D dreapta mobilă în jurul punctului fix A. Perpendiculara comună taie pe Δ în M şi pe D în N Se cere locul lui N.

Prin A ducem un plan xOy perpendicular în O pe Δ şi proectăm pe N în n pe planul xOy. Triunghiul MNA, dreptunghic în N are latura MN paralelă cu planul de proecţie xOy. Deci unghiul MNA se proectează în OnA după unghiu drept. Cum O şi A sunt fixe, punctul n descrie cercul de diametru OA şi fiindcă Nn este de direcţie fixă, paralelă cu Δ, punctul N *descrie un cilindru având ca secţiune dreaptă cercul de diametru* OA *şi ca direcţie o generatrice dreaptă* Δ.



Soluţie analitică. Luăm origina în O şi ca axe pe Δ, OA şi perpendiculara în O pe planul (Δ, A). Fie α, β, γ direcţia dreptei D, ale cărei ecuaţii vor fi

$$(1)\qquad \frac{x-a}{\alpha}=\frac{y}{\beta}=\frac{z}{\gamma}.$$

Pentru a găsi pe N se duce prin Δ un plan perpendicular pe D. Ecuaţia acestui plan este:

$$(2)\qquad \alpha x+\beta y=0.$$

Locul lui N se găseşte eliminând pe α, β, γ între (1) şi (2). Se găseşte uşor

$$x^2+y^2-ax=0$$

care este un cilindru circular, având pe Δ ca generatoare.

Au găsit locul exact pe cale geometrică d-nii: *C. Berdan* (Bârlad); † *N. G. Botea* (Bucureşti); *N. Goldstein* (Timişoara); *N. N. Mihăileanu* (Bucureşti); *V. Percea* (Timişoara) şi *I. I. Roman* (Bucureşti).

D-l *N. N. Mihăileanu* a dat şi o foarte bună soluţie analitică.

Un corespondent de pe vremuri a demonstrat (?) geometric că locul e o suprafață sferică, iar altul a găsit (?) că locul e cuartică.

507. — *Se dă un cerc* O *și un triunghiu înscris* A B C. *Se duce diametrul punctului* A *și înălțimea* A D. *Se proiectează puctul* B *și* C *pe acest diametru în* E *și* F. *Se prelungește* D E *și* D F *până ce întâlnesc pe* A C *și* A B *respectiv în* G *și* H. *Să se demonstreze că punctele* A, D, G, H *sunt conciclice.*

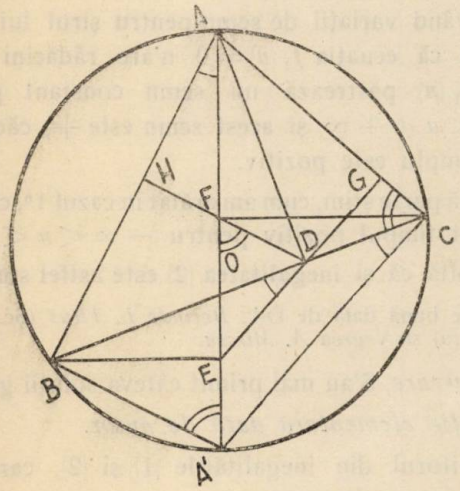
C. N. DRAMBA

Soluția. Fie A′ diametralul lui A în O. Din patrulaterele inscriptibile B A D E și B A C A′ se scoate

$$\sphericalangle BAA' = \sphericalangle BDE$$

$$\sphericalangle BAA' = \sphericalangle BCA'$$

$$\sphericalangle BDE = \sphericalangle BCA',$$



care arată că E G și A′ C sunt paralele. Cum A′ C ⊥ A C urmează că ∢ D G A este drept.

La fel din patrulaterele D F A C și A′ B A C se scoate

$$\sphericalangle BFA' = \sphericalangle DCA = \sphericalangle BA'A,$$

deci D F este paralelă cu A′ B și perpendiculară pe A B.

Au dat soluții analoage *Costinescu Antoaneta* și *Agapescu M. N., Ardelea R., Bey M. Gh., † Botea G. N., Braeșter I. O., Cernes A. M., Cocea Gh. Th., Coșniță C. David H. I., Dinu S. D., Dumitrescu Eug. Feldștein M. S Florea V. Gh., Gheorghiu C. Ad., Gheorghiu Th. Gh. Ionescu B. Al., Ionescu-Bujor C., Iovănescu F., Iscovici P, Manolescu I. N., Mareș Gr, Munteanu Gh., Nestor G. D., Nicolau-Dobridor I., Niculescu St. Em., Novacu V., Pașcanu F., Popescu N. Corn., Col. Potopeanu Gh, Scripcă K, Segal Leon, Sigall Louis, Sobel Mircea, Stan I. A., Stoica N. A., Süli M., Tăraș V., Teodorescu N., Vasilescu B., Vasiliu Gh. Gh., Vlădescu I., Winkler A., Zagaican I* și *Zamfirescu Gh. I.*

D-l *Nestor G. D.* observă că se pot înlocui înălțimele A D și diametrul A A′ prin două izogonale și proprietatea se menține.

Se mai poate observa că reciproc, *dacă perpendicularele din* D *pe* A B *și* A C *întâlnesc diametrul* A A′ *în* F *și* E *atunci* C F *și* B E *sunt perpendiculare pe* A A′.

In adevăr D E fiind paralelă cu C A′, avem:

$$\sphericalangle EDB = \sphericalangle A'CB = \sphericalangle BAE$$

deci B A D E este inscriptibil și B E ⊥ A A′ etc.

Gh. B.

1556. — *Să se demonstreze identitatea:*

$$\frac{\sqrt{b(a-x)}-\sqrt{a(b-x)}}{\sqrt{b(a-x)}+\sqrt{a(b-x)}} =$$

$$\frac{(\sqrt{a-x}+\sqrt{b-x})[\sqrt{ab}-x-\sqrt{(a-x)(b-x)}]}{\sqrt{a-x}-\sqrt{b-x})[\sqrt{ab}-x+\sqrt{(a-x)(b-x)}]}$$

V. VALCOVICI

Insemnând cu E al 2-lea membru și efectuând înmulțirile la numărător și numitor, avem succesiv:

$$E = \frac{\sqrt{a-x}(\sqrt{ab}-x)-(a-x)\sqrt{b-x}+\sqrt{b-x}(\sqrt{ab}-x)-(b-x)\sqrt{a-x}}{\sqrt{a-x}(\sqrt{ab}-x)+(a-x)\sqrt{b-x}-\sqrt{b-x}(\sqrt{ab}-x)-(b-x)\sqrt{a-x}} =$$

$$\frac{\sqrt{a-x}(\sqrt{ab}-x-b+x)+\sqrt{b-x}(\sqrt{ab}-x-a+x)}{\sqrt{a-x}(\sqrt{ab}-x-b+x)-\sqrt{b-x}(\sqrt{ab}-x-a+x)} =$$

$$\frac{\sqrt{a-x}\cdot\sqrt{b}(\sqrt{a}-\sqrt{b})-\sqrt{b-x}\cdot\sqrt{a}(\sqrt{a}-\sqrt{b})}{\sqrt{a-x}\cdot\sqrt{b}(\sqrt{a}-\sqrt{b})+\sqrt{b-x}\cdot\sqrt{a}(\sqrt{a}-\sqrt{b})}.$$

Simplificând cu $\sqrt{a}-\sqrt{b}$ şi numărătorul şi numitorul mai putem scri:

$$E=\frac{\sqrt{b(a-x)}-\sqrt{a(b-x)}}{\sqrt{b(a-x)}+\sqrt{a(b-x)}}.$$

Observăm astfel că identitatea dată este stabilită.

Soluţii date de d-nii: *Anastasiu M. Mihail* (lic. Milit., N. Filipescu), *Andrunachievici Vladimir* (student, Iaşi), *Apostol Radu*, *Berinde L. Titus* (Şc. Polit., Timişoara), *Buznea D. Dinu* (liceul Militar, N. Filipescu), *Kornis Ernest* (lic. Diaconovici Loga, Timişoara), *Matei D-tru* (bacalaureat, Iaşi), *Medeleanu Ion* (bacalaureat), *Milu I. Nicolae* (Şc. Pregătitoare de Of., Bucureşti), *Mititeanu Scipio* (lic. Bistriţa), *Negrea A. Mircea* (Brăila), *Popescu Zorica N. Alexandru*, *Ripianu Andrei*, *Segal Zoe* (Bucureşti), *Staicu I. N.* (lic. Milit., N. Filipescu), *Ştefănescu Costin* (lic. Milit., N. Filipescu), *Stoenescu D. Mirel* (lic. Milit., N. Filipescu) şi *Tica P. Marin* (Sub-Lt).

1565. — *Să se arate că oricare ar fi n avem:*

$$0<\frac{n^4-n^3+7n+6}{n^4+4n+4}<2.$$

IOAN CUREA

Avem de stabilit două inegalităţi:

1°. Prima inegalitate este:

$$(1)\qquad 0<\frac{n^4-n^3+7n+6}{n^4+4n+4}=\frac{f(n)}{\varphi(n)}.$$

Folosim teorema lui *Rolle*, pentru a vedea dacă numărătorul şi numitorul au rădăcini reale.

Avem:

$$f'(n)=4n^3-3n^2+7=(n+1)(4n^2-7n+7)$$

$$\varphi'(n)=4n^3+4=4(n+1)(n^2-n+1).$$

Se observă cu uşurinţă că $f'(n)=0$ şi $\varphi'(n)=0$ au numai rădăcina reală $n=-1$.

Formând şirul lui *Rolle*, avem:

$$\begin{array}{ccc} f(-\infty) & f(-1) & f(+\infty) \\ + & + & + \end{array}$$

De asemenea:

$$\begin{array}{ccc} \varphi(-\infty) & \varphi(-1) & \varphi(+\infty). \\ + & + & + \end{array}$$

In ambele cazuri vedem că şirul lui *Rolle* nu prezintă variaţii de semn, deci $f(n)$ şi $\varphi(n)$ vor avea fiecare un semn constant pentru $-\infty<n<+\infty$.

Constatăm cu uşurinţă însă că aceste semne consitante sunt $+$ pentru ambele funcţiuni, căci $f(0)$ şi $\varphi(0)$ de exemplu sunt pozitive.

Rezultă de aci că inegalitatea (1) este stabilită, numărătorul şi numitorul fiind positivi pentru $-\infty<n<+\infty$.

2°. A 2-a inegalitate din enunţ se poate scri:

$$0<2-\frac{n^4-n^3+7n+6}{n^4+4n+4}$$

sau:

$$(2)\qquad 0<\frac{n^4+n^3+n+2}{n^4+4n+4}=\frac{f_1(n)}{\varphi(n)}.$$

Avem:

$$f_1'(n)=4n^3+3n^2+1=(n+1)(4n^2-n+1).$$

Ecuaţia $f_1'(n)=0$ are numai rădăcina reală $n=-1$.

Şirul lui *Rolle* pentru ecuaţia $f_1(n)=0$ este:

$$\begin{array}{ccc} f(-\infty) & f(-1) & f(+\infty) \\ + & + & + \end{array}$$

Neavând variaţii de semn pentru şirul lui *Rolle* rezultă că ecuaţia $f_1(n)=0$ n'are rădăcini reale, deci $f_1(n)$ păstrează un semn constant pentru $-\infty<n<+\infty$ şi acest semn este $+$, căci $f_1(0)$ de exemplu este pozitiv.

De altă parte ştim, cum am arătat în cazul 1°, că $\varphi_1(n)$ este tot timpul pozitiv pentru $-\infty<n<+\infty$.

Rezultă că şi inegalitatea (2) este astfel stabilită.

Soluţie bună dată de D-l: *Berinde L. Titus* (Şc. Polit., Timişoara) şi *Negrea A. Mircea*.

Observare. S'au mai primit câteva soluţii greşite.

Soluţie elementară dată de autor.

Numitorul din inegalităţile (1) şi (2), care este acelaşi, se poate scri:

$$n^4+4n+4=(n^2-1)^2+(2n^2+4n+3).$$

Termenul al 2-lea este pozitiv fiindcă are rădăcini imaginare, iar primul termen este un patrat. Numitorul este deci totdeauna pozitiv.

Numărătorii din inegalităţile (1) şi (2) se pot scri ca sume a doi termeni pozitivi, anume:

$$f(n)=\left(n^2-\frac{1}{2}n-2\right)^2+\frac{15n^2+20n+40}{4}$$

$$f_1(n)=\left(n^2+\frac{1}{2}n-1\right)^2+\frac{7n^2+8n+4}{4}.$$

Rezultă astfel că inegalităţile (1) şi (2) sunt stabilite, întru cât $f(n)$, $\varphi(n)$ şi $f_1(n)$, $\varphi(n)$ sunt pozitivi pentru $-\infty < n < +\infty$.

1576. — *Ştiind că* A, B, C *sunt unghiurile unui triunghiu, se cere să se determine relaţia între* α, β, γ *care asigure compatibilitatea sistemului:*

$$\begin{cases} \dfrac{\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}} = \alpha \\ \dfrac{\sin\frac{B}{2}}{\cos\frac{C}{2}\cos\frac{A}{2}} = \beta \\ \dfrac{\sin\frac{C}{2}}{\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}} = \gamma . \end{cases}$$

In urmă să se rezolve sistemul în cazul particular

$$\alpha = 2\beta = \frac{4}{3+\sqrt{3}}, \quad \beta = \frac{2\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}}.$$

V. Alaci

1°. Dacă, în prima ecuaţie, înmulţim cu $4\cos\frac{A}{2}$ numărătorul şi numitorul fracţiei din primul membru şi ţinem seamă de formulele cunoscute,

$$2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2} = \sin A, \quad 4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} = \sin A + \sin B + \sin C,$$

atunci avem:

$$\begin{cases} \dfrac{2\sin A}{\sin A + \sin B + \sin C} = \alpha, \quad \text{analog} \\ \dfrac{2\sin B}{\sin A + \sin B + \sin C} = \beta \\ \dfrac{2\sin C}{\sin A + \sin B + \sin C} = \gamma . \end{cases}$$

Adunând aceste ecuaţii obţinem:

$$\alpha + \beta + \gamma = 2, \tag{1}$$

care este condiţia de compatibilitate cerută.

2°. Să trecem la rezolvarea sistemului dat.

Intâi observăm, ţinând seamă de datele enunţului, că avem:

$$\alpha + \beta + \gamma = \frac{4}{3+\sqrt{3}} + \frac{2}{3+\sqrt{3}} + \frac{2\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}} = 2,$$

deci condiţia de compatibilitate (1) este satisfăcută.

Ne întoarcem acum la sistemul din enunţ, unde α, β, γ trebuesc înlocuiţi cu valorile numerice date.

Fiindcă,

$$\cos\frac{B+C}{2} = \cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} - \sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} = \sin\frac{A}{2}$$

deoarece

$$\frac{B+C}{2} = 90^0 - \frac{A}{2},$$

A, B, C fiind unghiurile unei triunghiu, rezultă,

$$\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} = \sin\frac{A}{2} + \sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$$

şi deci prima ecuaţie a sistemului devine:

$$\frac{\sin\frac{A}{2}}{\sin\frac{A}{2} + \sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}} = \alpha .$$

Inversând această ecuaţie o mai putem scri:

$$\frac{\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}{\sin\frac{A}{2}} = \frac{1}{\alpha} - 1 =$$

$$\frac{3+\sqrt{3}}{4} - 1 = \frac{\sqrt{3}-1}{4}.$$

Prin permutări circulare obţinem analog:

$$\frac{\sin\frac{C}{2}\sin\frac{A}{2}}{\sin\frac{B}{2}} = \frac{1}{\beta} - 1 =$$

$$\frac{3+\sqrt{3}}{2} - 1 = \frac{\sqrt{3}+1}{2},$$

$$\frac{\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}}{\sin\frac{C}{2}} = \frac{1}{\gamma} - 1 =$$

$$\frac{3+\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} - 1 = \frac{3-\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}.$$

Sistemul dat este deci echivalent cu următorul:

$$(1)\quad \begin{cases} \dfrac{\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}{\sin\frac{A}{2}} = \dfrac{\sqrt{3}-1}{4} \\ \dfrac{\sin\frac{C}{2}\sin\frac{A}{2}}{\sin\frac{B}{2}} = \dfrac{\sqrt{3}+1}{2} \\ \dfrac{\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}}{\sin\frac{C}{2}} = \dfrac{3-\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}. \end{cases}$$

Inmulţind primele două ecuaţii şi simplificând obţinem:

$$\sin^2\frac{C}{2} = \frac{3-1}{8} = \frac{1}{4}$$

sau:

$$\sin\frac{C}{2} = \frac{1}{2} = \sin 30^0,$$

(fiind că $0 < C < 180^0$)

De aci deducem

$$C = 60^0.$$

Inmulţind ecuaţiile a 2-a şi a 3-a din (1) şi reducând, avem

$$\sin^2\frac{A}{2} = \frac{1}{2},$$

deci

$$\sin\frac{A}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \sin 45^0,$$

(fiindcă $0 < A < 180^0$).

Rezultă,

$$A = 90^0.$$

Pentru unghiul B avem:

$$B = 180^0 - 60^0 - 90^0 = 30^0.$$

Soluţiile sistemului dat, sunt astfel:

$$A = 90^0, \quad B = 30^0, \quad C = 60^0.$$

Au soluţionat problema, d-nii: *Aman V. C tin* (Şc. Polit., Timişoara), *Berinde L. Titus* (Şc. Polit, Timişoara), *Kornis Ernest* (lic. Loga, Timişoara) şi *Murgu V. Marţian* (Şc. Polit., Timişoara).

1579. — *Să se găsească patratul perfect de patru cifre însemnătoare diferite, de forma a b c d unde c d este patrat perfect, divizibil prin a, b, c, d şi* $ab = a+b+c+d$.

MARTIAN V. MURGU

Patratele de două cifre însemnătoare sunt: 16, 25, 36, 49, 64 şi 81.

Dintre acestea numai 36 este divizibil prin fiecare din cifrele sale, deci:

$$cd = 36.$$

Dar cd mai este încă divizibil prin fiecare din cifrele

(1) 1, 2, 4 şi 9,

deci ab trebueşte format cu aceste cifre.

Din relaţia dată:

(2) $ab = a+b+c+d = a+b+3+6,$

rezultă, $ab < 27$.

Numerele ab formate cu cifrele din şirul (1), mai mici ca 27, sunt:

12, 14, 19, 21, 24.

Dintre acestea numai numerile 12, 14, 19 satisfac condiţia (2).

Rezultă că patratul cerut $abcb$ ar putea fi:

1236, 1436, 1936.

Dintre acestea însă numai 1936 este patrat perfect şi ne dă soluţia problemei.

Soluţii bune date de d-nii: *Aman V. C-tin* (Şc. Polit., Timişoara), *Anastasiu M. Mihail* (lic. Milit., N. Filipescu), *Bârlea G. Victor*, *Berinde L. Titus* (Şc. Polit, Timişoara), *Cetăţianu Stelian* (lic, Sincai, Bucureşti), *Czijak Vasile*)lic. Bistriţa), *Dăscălescu Şt. Hristache* (Focşani), *Jidanu I. C-tin* (lic. Beiuş), *Manuilă Alexandru*, *Matei D. D-tru* (bacalaureat, Iaşi), *Medeleanu Ion* (bacalaureat), *Moldovan Cornel*, *Motaş Camil*, *Petrescu C. A.* (lic. Milit., N. Filipescu), *Popoviciu Gabriel* (Şc. Polit., Bucureşti), *Reicher Herman* (lic. Internat, Iaşi), *Ripianu Andrei*, *Şandor Vasile*, *Staicu I. N.*, *Stamate I. Ionel* (lic. Lugoj), *Segal Zigu* (lic. Vaslui), *Ştefănescu D. Nicolae* (lic. Milit., N. Filipescu) şi *Vijelie Gh. Eugen.*

1580. — *Să se rezolve sistemul:*

$$\begin{cases} x+y+z=7 \\ x^2+y^2+z^2=149 \\ x^3+y^3+z^3=385. \end{cases}$$

DUMITRU ȚARALUNGA

Scădem din prima ecuație ridicată la patrat pe a 2-a ecuație, apoi ridicăm tot prima ecuație la puterea 3-a și scădem a 3-a ecuație, obținem:

$$2(xy+yz+zx)=-100,$$

$$3(x^2y+xy^2+y^2z+yz^2+z^2x+zx^2)+$$

$$6xyz=-42.$$

Aceste ecuații le mai putem scri:

$$xy+yz+zx=-50$$

$$xy(7-z)+yz(7-x)+zx(7-y)+$$

$$2xyz=-14.$$

Această din urmă ecuație, o putem simplifica astfel:

$$-xyz+7(-50)=-14,$$

deci:

$$xyz=-336.$$

Sistemul dat este echivalent cu următorul:

$$\begin{cases} x+y+z=7 \\ xy+yz+zx=-50 \\ xyz=-336. \end{cases}$$

Având cunoscute suma, produsul câte două și produsul necunoscutelor x, y, z, putem forma ecuația,

$$(1) \qquad t^3-7t^2-50t+336=0$$

cu rădăcinele x, y, z.

Dar observăm că ecuația (1) se mai poate scri:

$$(t+7)(t-6)(t-8)=0.$$

Avem astfel sitemul de soluții:

$$\begin{cases} x=-7 \\ y=6. \\ z=8. \end{cases}$$

Alte sisteme de soluții se pot forma prin permutări între necunoscute.

Soluții date de d-nii: *Anastasescu M. Mihail* (bacalaureat, Ploești), *Anastasiu M. Mihail* (lic. Milit. N. Filipescu), *Andronic M.* (Șc. Polit., București), *Deciulescu George* (Buzău), *Dăscălescu Șt. Hristache* (Focșani), *Medeleanu Ion* (bacalaureat), *Motăș Camil*, *Murgu V. Marțian* (Șc. Polit., Timișoara), *Negrea A. Mircea* (Brăila), *Popescu Zorica N. Alexandru*, *Popoviciu G.* (Șc. Polit., București), *Popoviciu Mircea* (lic. Lugoj), *Ripianu Andrei*, *Stamate I. Ionel* (lic. Lugoj), *Stoenescu D. Mirel* și *Theodorescu N. Dorin* (lic. Milit., N. Filipescu).

Altă soluție. Vom folosi cunostințele din articolul d-lui prof. *I. Curea „Asupra sistemelor de ecuații de grad superior"*, „R. M. T.", an. XVII, p. 27.

In adevăr, dacă avem ecuația

$$(1) \qquad t^3+pt^2+qt+r=0,$$

cu rădăcinele x, y, z, atunci ținând seamă de relațiile ce există intre rădăcini și coeficienți și de enunț putem scri:

$$\begin{cases} x+y+z=-p=-7 \\ x^2+y^2+z^2=p^2-2q=149 \\ x^3+y^3+z^3=-p^3+3pq-3r=385. \end{cases}$$

De aci deducem cu ușurință:

$$p=7, \qquad q=-50, \qquad r=336.$$

Ecuația (1) devine astfel:

$$t^3-7t^2-50t+336=0,$$

care este tocmai ecuația (1) din soluție precedentă, astfel că se urmează apoi mai departe același mers.

Au trimes soluții în acest fel, d-nii: *Aman V. C-tin* (Șc. Polit., Timișoara), *Andronic M.* (Șc. Polit., București), *Berinde L. Titus* (Șc. Polit., Timișoara), *Cetățeanu Stelian* (lic. Șincai, București), *Dăscălescu Șt. Hristache* (Focșani), *Jidanu I. C-tin* (lic. Beiuș), *Lupescu Corneliu* (Sub-Lt), *Matei D. D-tru* (bacalaureat, Iași), *Popoviciu G.* (Șc. Polit, București), *Reicher L. Herman* (lic. Internat

Iaşi), *Rosemblatt S. Millu* (lic. Internat, Iaşi), *Segal Zigu* (lic. Vaslui) şi *Ştefănescu D. Nicolae* (lic Milit, N. Filipescu).

PROBLEME PROPUSE

1649. — Să se afle numărul de patru cifre în care suma cifrelor sale este egală cu numărul format de primele două cifre, iar diferenţa între inversul său şi el este egală cu 90.

LT MIHAI C. I. VLAD

1650. — Să se rezolve ecuaţiunile:

$$\sqrt{x^2+2\sqrt{x^2-1}} \pm \sqrt{x^2-2\sqrt{x^2-1}} = 2$$

$$\sqrt{x^2+2\sqrt{x^2-1}} \pm \sqrt{x^2-2\sqrt{x^2-1}} = 2\sqrt{x^2-1}\,.$$

L-T C. IONESCU-ŢIU

1651. — Să se rezolve în numere întregi sistemul diofantian:

$$\begin{cases} x^2 + a\,x\,y + b\,y^2 = z^2 \\ x \pm y = t^3 \end{cases}$$

A. GLODEN

1652. — Să se găsească rădăcinele întregi ale sistemului:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + \sqrt{z} = 23 \\ x + \sqrt{y} + z = 13 \\ x + \sqrt{y} + \sqrt{z} = 7\,. \end{cases}$$

NICOLAE BRADEANU

1653. — Intr'un triunghiu A B C, pe mediana $A A_1$ se ia un punct M prin care se duce o paralelă la A B ce întâlneşte pe B C în D. B M întâlneşte pe A C în P şi A D întâlneşte pe B M în N.

Să se arate că cercul de rază N B şi centru N trece prin P.

DINU D. BUZNEA

1654. — In punctul D pe semicercul circumscris triunghiului dreptunghic A B C, se construeşte unghiul C D E egal cu unghiul A B C, a cărui a doua latură taie ipotenuza B C în E, între B şi C.

1°. Perpendiculara E F în E pe B C, trece prin intersecţia A C, B D.

2°. A E şi D E sunt simetrice faţă de E F.

Să se studieze chestiunea în cazul când unghiul C D E se construeşte exterior, E pe prelungirea lui B C.

STELIAN CETATIANU

1655. — Intr'un triunghiu A B C, α, β, γ fiind bisectoarele interioare şi α', β', γ' bisectoarele exterioare, să se stabilească relaţiile:

$$\sum c \cos\frac{A-B}{2} = 2S\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}\right)$$

$$\sum c^2 \sin(A-B) = 8S^2\left(\frac{1}{\alpha\,\alpha'}+\frac{1}{\beta\,\beta'}+\frac{1}{\gamma\,\gamma'}\right).$$

SUB-LT MIRCEA GRUMAZESCU

1656. — Se dă triunghiul A B C în care A=45° şi se duce mediana B D a unghiului ascuţit B cunoscut.

1°. Se cere să se calculeze unghiul A B D.

2°. Cunoscând mediana B D = m se cere să se rezolve triunghiul A B C. Aplicaţie: B=30°, B D=5.

V. ALACI

1657. — Să se arate că:

$$\sin x + \sin y \pm \sin(x+y) = \pm 4 \sin\frac{x+y}{2} \cos\frac{x}{2} \cos\frac{y}{2},$$

$$\cos x + \cos y \pm \cos(x+y) = \mp 1 \pm 4 \cos\frac{x+y}{y} \cos\frac{x}{2} \cos\frac{y}{2}.$$

Cazul, $x+y+z = n\pi$.

N. N. MIHAILEANU

TABLA DE MATERII

I. ARTICOLE.

a) Aritmetica și Teoria Numerelor.

		Pag.
Gh. Constantinescu	Patrate sudate	37
A. Gloden	Sur les nombres de la forme a^2+ab+b^2 et les chaines quintigrades	122
Gh. Constantinescu	Descompunerea unui patrat într'o sumă de patrate perfecte	133

b) Algebra.

I. Curea	Asupra rezolvării sistemelor de ecuații de grad superior	27
I. C. Savin	Sisteme de ecuațiuni rezolvate cu ajutorul furmulelor lui Newton	49
Eug. Vișa	Două teoreme relative la teoria diferențelor	51
A. Gloden	Sur quelques équations indeterminees	97
Eug. Vișa	Asupra unei însumări . .	110

c) Geometrie.

N. N. Mihăileanu	Propoziții deduse prin inversiune	3
Gh. Buicliu	O problemă de geometrie .	73

d) Trigonometrie.

N. N. Mihăileanu	Articol de Trigonometrie .	85

e) Astronomie.

Sp. Ghițescu	Mecanismul Capturii la stelele duble	124

f) Mecanică.

C. V. Costăchescu	Asupra unei probleme de Cinematică navală . . .	13

g) Diverse.

Em. Borel	Les Mathématiques a l'exposition 1937	25
V. Alaci	† N. G. Botea	121

II. REDACȚIONALE.

***	Comitetul de conducere al Revistei Matematice din Timișoara	1-2

III. NOTE MATEMATICE.

a) Aritmetica și Teoria Numerelor.

1.[1]) **V. Thébault**	Sur des carrés curieux . .	6
6. **V. Thébault**	Questions d'arithmétique .	29
10. **V. Thébault**	Sur certains carrés parfaits	54
14. **A. Gloden**	Rectificarea Notei 10 . .	64

b) Algebra.

2. **A. Gloden**	Une manière d'obtenir des solutions entières de l'équation $x^{2\alpha}+y^{2\alpha}=z^{\alpha}+t^{\alpha}$, α étant un entier positif quelconque	7
5. **N. O. Zaharia**	Asupra ecuației pseudo-binoamă a d lui prof. *V. Alaci*	17
7. **A. Gloden**	Sur une méthode d'obtenir une solution générale de l'équation : $x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2+x_{n+1}^2=$ $y_1^2+y_2^2+\cdots+y_n^2+y_{n+1}^2$	30
8 **Gh. Buicliu**	Notă asupra problemei No. 1457	43
9. **M. Ghermănescu**	Asupra problemei 335 . .	44
11. **A. Gloden**	Sur une méthode donnant une infinité des solutions numériques de l'équation diophantienne : $x^2+a\,y^2=x'^2+b\,y'^2$, a et b étant des nombres impaires non carrés	55
12. **V. Alaci**	Asupra a două teoreme relative la teoria diferențelor.	63
13. **A. Gloden**	Sur l'équation diophantienne $2x^3+2y^3=u^3+v^3+w^3+t^3$	64
15. **A. Gloden**	Sur quelques équations diophantiennes renferment des carrés et des bicarrés . .	75
18. **A. Gloden**	Sur quelques systèmes indéterminés	91
19. **Gh. Bulcliu**	Relațiunea între problemele 99 și 1499	98
21. **Gh. Buicliu**	Enunțul problemelor practice	111
22. **A. Gloden**	Sur une procédé permettant d'obtenir des solutions de l'équation $x^2+y^1=z^2+t^{2k}$ $(K=3,6,\ldots 2n+1)$ . .	112
24. **D. Georgescu**	Rezolvarea unor ecuațiuni diophantienne	126
25. **A. Moessner**	Demonstrația elementară a imposibilității rezolvării raționale a ecuației, $x^4+y^4=z^4$	127
26. **A. Moessner**	Observare relativ la nota matematică : „Sur une méthode de formation des égalités multigrades : $a_1^p+a_2^p+\cdots=b_1^p+b_2^p=\cdots$ $(p=1,3,\ldots,2n+1)$ din R. M. T. anul XV. No. 12 .	127
27. **A. Gloden**	A propos de la note mathématique 24	137
28. **A. Gloden**	Résolution en nombres entiers de l'équation $x^2+xy+y^2=3zt$ . . .	137

c) Geometrie.

3. **A. Gloden**	Sur le triangle spécial $b+c=3a$	16
4. **V. Thébault**	Géométrie et Mécanique .	17
16. **V. Thébault**	Cercles associés à un triangle	77
17. **V. Thébault**	Sur le triangle podaire . .	90
20. **V. Thébault**	Triangle bordé de triangles equilatéraux	99
23. **V. Thébault**	Sur une triangle particulier	11

[1]) In această coloană sunt înscrise numerele de ordine ale notelor.

IV. BIBLIOGRAFIE.

		Pag.
N. Abramescu	Sur le développement d'une fonction suivant les puissances croissantes d'un polynome et applications à la determination des courbes de convergence de certaine séries de polynomes	19
N. Abramescu	Sur l'étude de la forme d'une cour e ou d'une surface dans le voisinage de l'un de ses points et une nouvelle interprétation de la cubique donnant les tangentes de *Darboux* et *Segre*	19
N. Abramescu	Sullo studio di una superficie nell'intorno di un suo punto e una nuova interpretazione della cubica che dà la tangenti di *Darboux* et *Segre*	19
N. Abramescu	Algebra financiară cl. VII. lic. comercial	93
N. Abramescu	Lecţiuni de Geometrie analitică	100
Pl. Andronescu	Graphische Darstellung der Wirk- Blind- Verzerrungs- und Scheinleistung, sowie ein B itrag zum Problem der Wechselströme beliebiger Kurvenform . . .	32
Th. Angheluţa	Sur une propriété qui caracterise la transformation conforme	78
Th. Angheluţa	Sur l'intégrale de M. *Denjoy*	78
Th. Angheluţa, T. Popovici, Gh. Călugăreanu,	Exerciţii şi probleme de Analiză, Teoria funcţiilor şi Mecanică raţională	19
Barral Souto T.	Sobre el problema de la tasa del interés an las rentes ciertas	7
Boletin Matematico	7, 18, 92, 100, 114, 128, 138	
† N. G. Botea	Une propriété de réciprocité	45
† N. G. Botea	Une relation entre nombres complexes et la généralisation d'un théorème de géométrie elémentaire .	45
Buletinul Şedinţelor	Societăţii Rom. de Ştiinţă 19, 100.	
Bulletin de Mathématiques et de Physique,	pure et appliquées, de l'École Polytechnique Roi Carol II, Bucarest	31
Bulletin Mathématique	de la Société Roumaine des Sciences 31.	
Bulletin Scientifique	de l'École Polytechnique de Timişoara	65
C. D. Buşilă	Concentrarea învăţământului tecnic superior	19
Cadastru	broşura Asociaţiei inginerilor cadastrali 7, 32	
Caranfil N.	Cum renunţăm anual la miliarde	138
Chestiuni de examen	dela Facultatatea de Ştiinţe din Cluj	100
Ciel de Terre	LII. anné	78
G. G. Constantinescu	Sur certains classes d'intégrales abéliennes . . .	56
G. G. Constantinescu	Sur la flexion des pièces droites	100
Crezul nostru	revista liceului „Spiru Haret" Piatra Neamţ	114
I. Curea	Anwendung der Brunschen Methode der Teilungsfehlerbestimmung	8
I. Curea	Rattachement de deux clichés dont les centres coincident avec les pôles célestes de deux dates différentes	8
I. Dumitriu	Culegere de probleme de Geometria Analitică . .	19
Gazeta Matematică	7, 18, 31, 45, 56, 64, 78, 92, 100, 114, 128, 138.	
Gazeta Matematică supliment	cu exerciţii 100, 114	
M. Ghermănescu	Sur un théorème de M. *Mauro Picone*	78
M. Ghermănescu	Curs de Analiză Matematică	92
M. Ghermănescu	Sur une classe nouvelle de noyaux de *Fredholm* . .	114
A. Gloden	Formules générales pour des chaînes trigrades . . .	78
I Gonzales Perera	Concepto de Angulo . . .	100
Ion Ionescu	Culegere de probleme de Aritmetică p. I.	92
J. Karamata	Compléments au théorème d'Abel et de son inverse	32
J. Karamata	Quelques moyaux particuliers pour établir des théorèmes des procédés de sommabilité	32
I. Lepşi	Buletinul Muzeului Naţional de Istorie Naturală din Chişinău	93
T. Levi-Civita	Movimenti per sola gravitazione di un sistema continuo	32
E. Gh. Mihăilescu	Sur le principe de contraction	93
E. Gh. Mihăilescu	Recherches sur la négation et l'équivalence dans le calcul des propositions .	93
P. Montel	Lecţiuni despre funcţiunile aproape periodice . . .	19
A. Myller	La courbure de *Bacaloglo* .	32
A. Myller	Tricentenarul Geometriei Analitice	32
A. Myller	La torsion moyenne d'une surface	32
D. V. Patriciu	Probleme fundamentale pentru viitorul industriei noastre de petrol	32
Pitagora	revista Colegiului Carol I. Craiova, 100	
Probleme de Capacitate din 1937	. . . . .	100
Revista Cercului de studii	şi a Asociaţiei absolvenţilor Şcoalei Sup. P. T. T. Timişoara, 7, 19, 32, 78, 114, 128.	
Revista de Ciencias	7, 45.	
P. Sergescu	La Vie Contemporaine des Mathématiques	19
P. Sergescu	Remarques pratiques sur l'intégration et certaines équation différentielles linéaires	114

		Pag.
Sergescu	Le développement des Sciences Mathématiques en Roumanie	114
Sierpinsky	Sur une décomposition du segment en plus que 2^{N_0} ensembles non mesurables et presque disjoints . .	32
Sierpinsky	Sur les fonctions dépendantes	32
Stambuleanu	Beitrag zur Frage des Wärmeüberganges in der Ansaugeperiode bei Verbrennungsmotoren mit hängenden Ventilen, insbesondere bei Flug- und Kraftfahrzeug Motoren	32
inţă şi progres	Revista ştiinţifică a liceelor Militare, 18, 32, 45, 56, 100, 114, 138.	
Stoilov	La Topologie et la Théorie des Fonctions	32
uhov	Istoricul Geodeziei . . .	19
Thébault	Questions de Géométrie .	32
Thébault	Note sur la théorie des nombres	32
Thébault	La sphère de *Longchamps*	32
hébault	Sur les sphères de S. *Roberts*	32
Thébault	Sur une application du dernier théorème de *Fermat*	93
oscano	Sui coeficienti della tangente e sui numeri di Bernoulli	19
oscano	Successioni ricorrenti e polinomi di Bernoulli e di Eulero	19
oscano	Operatori permutabili di secondo ordine	19
oscano	Sulle potenze di una matrice del secondo ordine . .	19
oscano	Determinanti involutori . .	32
oscano	Una transformazione di Pincherle e somma di alcune serie numeriche	32
oscano	Sullo scarto della permutabilita nella teoria degli operatori lineari . . .	100
escan	Consideraciones sobre la mecanica vectorial *y* relativista de los medios deformables	32
escan	Une formule de la réfraction astronomique déduit de la forme parabolique du trajet lumineux	32
escan	Teoria cinetică elementară a gazelor	32
escan	Considerations sur le problème de deux corps dans des masses variables .	100
Vişa	Noţiuni de Geometrie Cinematică	19

V. CHESTIUNI DE EXAMEN.

a Politechnică din Timişoara. Examen de intrare în anul pregătitor. Octomvrie 1936 . . 113

VI. DIVERSE INFORMAŢIUNI.

rea unui fond la Revista Matematică din Timişoara, din al cărui venit anual se acordă, drept premiu, un abonament la „Revistă“ unui elev al liceului „Ion Maiorescu“ din Giurgiu . . . 100

VII. PROBLEME PROPUSE ŞI REZOLVATE.

Numărul din coloana 1) arată numărul problemei propuse, cel din coloana 2) pagina la care a fost propusă, cel din coloana 3) volumul în care a fost propusă şi cel din coloana 4) pagina la care a fost rezolvată în volumul XVII. Problemelor care nu au nimic în coloana 4), nu li s'a publicat încă soluţia.

1).	2).	3).	4).
42	94	I	
50	110	„	
69	142	„	
88	174	„	
91	187	„	
92	187	„	
98	187	„	
100	14	II	
110	14	„	
121	30	„	
124	46	„	
140	62	„	
141	62	„	
164	94	„	
175	110	„	
176	126	„	
178	126	„	
185	126	„	
191	142	„	
194	142	„	
195	142	„	8
206	174	„	
217	185	„	
230	14	III	
235	30	„	
244	46	„	
255	62	„	
259	62	„	
264	78	„	
268	78	„	
275	94	„	
289	126	„	
291	126	„	
296	142	„	
299	142	„	56
313	174	„	
315	174	„	
317	174	„	
336	14	IV	138
344	30	„	
345	30	„	
347	46	„	
357	62	„	
359	62	„	
361	78	„	
369	94	„	
376	94	„	
382	110	„	

1).	2).	3).	4)
390	126	IV	
393	126	„	
406	158	„	
407	158	„	
411	158	„	
414	174	„	
418	174	„	
423	191	„	
424	191	„	
435	13	V	
440	30	„	
444	30	„	
450	46	„	
458	62	„	
460	62	„	
462	62	„	115
478	94	„	
479	94	„	
489	126	„	
507	158	„	139
516	174	„	
519	190	„	
524	190	„	
531	14	VI	
	122	IX	
535	30	VI	
541	46	„	9
542	46	„	
543	46	„	
548	46	„	
550	62	„	
557	78	„	
562	78	„	
569	94	„	
606	174	„	
608	174	„	
612	190	„	
613	190	„	
616	190	„	
622	22	VII	
634	54	„	
635	54	„	
649	86	„	
654	102	„	
656	102	„	
658	102	„	
667	134	„	65
686	134	„	

1).	2).	3).	4).
695	190	VII	
762	126	VIII	
766	126	„	
769	142	„	
772	142	„	
782	174	„	
794	190	„	
823	48	IX	93
832	60	„	78
847	84	„	101
851	96	„	
853	96	„	94
858	108	„	
860	108	„	
867	122	„	
879	144	„	
908	36	X	
923	60	„	79
924	60	„	
929	72	„	19
938	84	„	
939	84	„	
953	107	„	115
954	108	„	
956	108	„	94
961	120	„	
971	132	„	
971 bis	132	„	
974	138	„	79
979	138	„	
982	12	XI	
984	12	„	
992	24	„	
993	24	„	
1000	36	„	
1001	36	„	
1002	36	„	
1008	48	„	
1009	48	„	
1012	48	„	
1017	60	„	
1018	60	„	
1023	72	„	95
1027	72	„	
1035	84	„	
1036	84	„	
1037	84	„	
1043	96	„	
1044	96	„	
1046	96	„	103
1060	120	„	
1067	132	„	
1068	132	„	
1077	138	„	

1).	2).	3).	4).
1085	12	XII	
1093	24	„	
1107	48	„	
1108	48	„	
1113	60	„	104
1115	60	„	
1116	60	„	
1119	60	„	
1125	72	„	
1126	72	„	
1129	84	„	
1133	84	„	
1134	84	„	
1140	96	„	
1141	96	„	106
1142	96	„	
1145	96	„	
1146	108	„	
1149	108	„	
1156	120	„	
1157	120	„	
1158	120	„	
1160	120	„	
1161	132	„	
1163	132	„	
1166	132	„	
1167	132	„	
1173	138	„	
1174	138	„	
1182	12	XIII	
1183	12	„	
1187	24	„	
1188	24	„	
1195	36	„	
1198	36	„	
1205	48	„	
1206	48	„	
1212	60	„	
1213	60	„	
1216	60	„	
1218	72	„	
1219	72	„	
1220	72	„	
1223	72	„	
1224	72	„	
1225	84	„	
1228	84	„	
1229	84	„	
1231	84	„	
1234	96	„	
1236	96	„	
1241	108	„	
1243	108	„	
1245	108	„	
1248	120	„	

1).	2).	3).	4).
1250	120	XIII	
1253	120	„	
1258	132	„	
1262	132	„	
1263	132	„	
1266	132	„	
1268	141	„	
1270	141	„	
1272	12	XIV	
1274	12	„	
1275	12	„	
1279	12	„	
1280	24	„	
1281	24	„	
1282	24	„	
1289	36	„	
1290	36	„	
1291	36	„	
1292	36	„	
1294	36	„	
1295	36	„	
1296	52	„	
1297	52	„	
1298	52	„	
1299	52	„	
1300	52	„	
1306	64	„	
1307	64	„	
1308	64	„	
1309	64	„	
1311	64	„	
1315	76	„	
1319	76	„	
1322	88	„	
1323	88	„	
1325	88	„	
1327	88	„	
1331	100	„	
1333	100	„	
1334	100	„	
1341	112	„	
1349	124	„	
1350	124	„	
1351	124	„	
1354	136	„	
1357	136	„	
1363	148	„	
1364	148	„	
1365	148	„	
1370	12	XV	
1371	12	„	
1372	12	„	
1377	24	„	
1378	24	„	
1379	24	„	

1).	2).	3).	4).
1380	24	XV	
1385	36	„	
1386	36	„	
1387	36	„	
1388	36	„	
1389	36	„	
1390	36	„	
1391	36	„	
1393	48	„	
1395	48	„	
1396	48	„	
1398	48	„	
1402	60	„	
1405	60	„	
1406	60	„	
1407	60	„	
1413	72	„	
1414	72	„	
1419	84	„	
1422	84	„	
1423	84	„	
1427	96	„	
1428	96	„	
1430	96	„	
1435	108	„	
1436	108	„	
1437	108	„	
1438	108	„	
1442	120	„	
1443	120	„	
1445	120	„	
1446	120	„	
1447	120	„	
1450	132	„	
1454	132	„	
1455	132	„	20
1457	144	„	32
1458	144	„	20
1459	144	„	
1460	144	„	
1461	144	„	
1465	16	XVI	21
1466	16	„	
1467	16	„	117
1469	16	„	33
1470	16	„	21
1472	28	„	
1473	28	„	34
1474	28	„	
1475	28	„	
1477	28	„	118
1478	28	„	
1479	28	„	34
1481	40	„	119
1482	40	„	

1).	2).	3).	4).
1488	40	XVI	
1485	40	„	
1486	40	„	
1488	40	„	128
1489	52	„	
1490	52	„	
1491	52	„	10
1492	52	„	
1493	52	„	
1494	52	„	
1495	52	„	129
1496	52	„	
1497	64	„	34
1498	64	„	
1499	64	„	10
1500	64	„	22
1501	64	„	
1502	64	„	
1503	64	„	11
1504	64	„	35
1505	76	„	36
1506	76	„	79
1507	76	„	
1508	76	„	23
1509	76	„	66
1510	76	„	23
1511	76	„	
1512	76	„	11
1513	88	„	45
1514	88	„	
1515	88	„	
1516	88	„	
1517	88	„	45
1518	88	„	67
1519	88	„	46
1520	88	„	47
1521	100	„	47
1522	100	„	69
1523	100	„	56
1524	100	„	57
1525	100	„	
1526	100	„	
1527	100	„	80
1528	100	„	95
1529	112	XVI	69
1530	112	„	
1531	112	„	
1532	112	„	
1533	112	„	
1534	112	„	
1535	112	„	70
1536	112	„	
1537	124	„	70
1538	124	„	71
1539	124	„	81
1540	124	„	58
1541	124	„	81
1542	124	„	
1543	124	„	
1544	124	„	82
1545	124	„	
1546	136	„	83
1547	136	„	
1548	136	„	
1549	136	„	106
1550	136	„	107
1551	136	„	59
1552	136	„	59
1553	136	„	
1554	147	„	
1555	147	„	
1556	148	„	139
1557	148	„	
1558	148	„	
1559	148	„	
1560	148	„	
1561	148	„	
1562	12	XVII	130
1563	12	„	
1564	12	„	
1565	12	„	140
1566	12	„	
1567	12	„	
1568	12	„	
1569	12	„	
1570	24	„	
1571	24	„	
1572	24	„	130
1573	24	XVII	131
1574	24	„	
1575	24	„	
1576	24	„	141
1577	24	„	
1578	36	„	131
1579	36	„	142
1580	36	„	143
1581	36	„	
1582	36	„	
1583	36	„	
1584	36	„	
1585	36	„	
1586	48	„	
1587	48	„	
1588	48	„	
1589	48	„	
1590	48	„	
1591	48	„	
1592	48	„	
1593	48 / 96	„	
1594	60	„	
1595	60	„	
1596	60	„	
1597	60	„	
1598	60	„	
1599	60	„	
1600	60	„	
1601	60	„	
1602	72	„	
1603	72	„	
1604	72	„	
1605	72	„	
1606	72	„	
1607	72	„	
1608	72	„	
1609	72	„	
1610	84	„	
1611	84	„	
1612	84	„	
1613	84	„	
1614	84	„	
1615	84	„	
1616	84	XVII	
1617	84	„	
1618	96	„	
1619	96	„	
1620	96	„	
1621	96	„	
1622	96	„	
1623	96	„	
1624	96	„	
1625	108	„	
1626	108	„	
1627	108	„	
1628	108	„	
1629	108	„	
1630	108	„	
1631	108	„	
1632	108	„	
1633	120	„	
1634	120	„	
1635	120	„	
1636	120	„	
1637	120	„	
1638	120	„	
1639	120	„	
1640	120	„	
1641	132	„	
1642	132	„	
1643	132	„	
1644	132	„	
1645	132	„	
1646	132	„	
1647	132	„	
1648	132	„	
1649	144	„	
1650	144	„	
1651	144	„	
1652	144	„	
1653	144	„	
1654	144	„	
1655	144	„	
1656	144	„	
1657	144	„	

TABLOUL NUMELOR[1]

Abason E., 1, 18, 31.
Abramescu N., 1, 19, 24, 93, 100.
Acikgeozian A. N., 95, 102.
Adam D. R., 1.
Adamescu M., 1.
Agapescu M. N., 139.
Alaci V., 1, 3, 12, 13, 17, 20, 34, 25, 36, 37, 47, 48, 49, 59, 60, 61, 63, 65, 72, 73, 83, 84, 85, 95, 96, 97 101, 102, 108, 109, 117, 120, 121, 122, 132, 133, 141, 144.
Alembert d', 8.

1) Numerele care urmează după nume, arată paginile în care se găsesc publicate numele.

Aman V. C., 130, 131, 142, 143.
Amărăsteanu F. M., 10, 11, 12, 20, 21, 23, 24, 33, 34, 35, 36, 45, 46, 47, 56, 58, 59, 60, 67, 70, 71, 84, 96, 106, 107, 108, 118, 119, 120, 128, 131, 132.
Anastasescu M. M., 46, 108, 118, 130, 131, 143.
Anastasiade I., 1.
Anastasiu M. M., 45, 46, 47, 58, 71, 118, 140, 142.
Andrievici N., 21, 46, 47, 58, 71.
Andronache V., 47.
Andronescu P., 1, 32, 96.
Andrunachievici V., 11, 12, 20, 21, 23, 34, 35, 45, 46, 47, 58, 59, 69, 81, 118, 130, 131, 132, 140.
Andronic M., 143.
Angelescu A., 1.
Angheluță T., 1, 19, 63, 78, 100.
Anton G. G., 36, 45, 47, 58, 59, 60, 69, 71, 84, 107, 108, 119.
Apostol G. N., 46.
Apostol V. R., 11, 12, 21, 24, 45, 47, 58, 60, 80, 82, 107, 118, 128, 131, 140.
Arbter E., 106.
Ardelea R., 139.
Ardelean St., 1.
Arend S., 78.
Arghir I., 1.
Asachi G., 56, 100, 114, 138.
Aubert, 121.
Avramescu A., 32.

Babeţiu C., 10, 21, 46, 47, 58, 71, 80, 130.
Bacaloglu, 32.
Băcicov B., 94, 95.
Băcicov V., 95.
Bădărău E., 19.
Baidaff B. I., 1, 18, 92, 100, 114.
Baize P., 124, 125, 126.
Bakony C., 1.
Bal L., 20, 21.
Bălăuță G., 21.
Balazs D., 1.
Băleanu N., 95.
Bănărescu M., 1.
Banciu I., 1.
Barbilian D., 31, 100, 114.
Bărbulescu C. T., 21.
Bărglăzan A., 1, 65.
Bârlea G. V., 142.
Baron C., 1.
Begu I. S., 10, 21, 45, 46, 119, 128, 130, 136.
Beloiu B. D., 21, 58, 59, 71, 107.
Berdan C., 56, 138.
Berinde L., T. 10, 21, 24, 34, 46, 47, 58, 70, 71, 72, 84, 118, 130, 131, 132, 140, 142.
Bernoulli, 19.
Berzolavi L., 32.
Bey M. Gh., 139.
Biesbroeck Van, 124.
Blaşian V., 1.
Bobârnac M., 1.
Boborodea I., 47.
Boerescu P. G., 95, 102.
Boisnard L., 95.
Bonea I., 1, 7.
Bordeianu A., 10.
Borel E., 25.
Boşoldea G. G., 46.
† Botea N. G., 1, 9, 31, 45, 121, 122, 138, 139.
Botez M., 1, 48, 70, 72, 84, 96.
Bouligand G., 31.
Brădeanu N., 131, 144.
Braesta I. O., 139.
Brahmagupta, 127.
Bratu Gh., 1, 31.
Breazu D., 1.
Breteanu C., 21.
Brianchon, 116.
Buffon, 26.
Buiciu G., 1, 9, 10, 12, 24, 44, 48, 65, 66, 72, 73, 84, 99, 108, 112, 120, 132.
Buiculescu C. R., 45.
Bunescu A., 32, 56, 100, 128.
Bungeţeanu D. Pr., 114.
Burnham, 128.
Buşilă D. C., 19.
Buttescu D., 19.
Buzincu I. I., 45.
Buznea D. D., 58, 71, 130, 131, 140, 144.

Călniceanu C., 1.
Călugăreanu G., 19, 84.
Câmpan F., 31.
Cândea C., 1, 65.
Capriel H., 64, 128.
Captura, 125.
Caraman E., 31.
Caranfil N., 138.
Carmichael, 127.
Carnot, 86.
Catona V., 1.
Cauchy, 26, 31.
Cazanacli V. P., 10, 21, 34, 35, 45, 46, 47, 57, 58, 60, 69, 70, 71, 81, 82, 84, 96, 100, 114, 119, 120, 128, 138.
Centea Z., 114.
Cernat C., 21, 47.
Cernes A. M., 139.
Cetăţeanu S., 130, 142, 143, 144.
Chamberlin, 125.
Chirilă I., 114.
Chiriţă M. M., 21.
Cioc I. D., 21, 57, 58, 70, 118, 130, 131.
Ciorănescu N., 31.
Claudian V., 1, 114.
Coandă I. V., 95, 102.
Coca A., 1.
Cocea G. T., 139.
Codreanu T., 100.
Cojocaru M. M., 102.
Cojocaru I. V., 79.
Colin S. A., 32.
Coman A., 1, 103, 113.
Comănescu A., 1.
Comberousse Ch., 62, 63.
Comloşanu Cornelia, 21, 34, 45, 46, 47, 58, 70, 71, 80, 107, 108, 118, 128, 130.
Constantinescu Anișoarela, 139.
Constantinescu G., 1, 131.
Constantinescu G. G., 1, 20, 32, 37, 43, 45, 56, 65, 100.
Constantinescu I., 32.
Constantinescu C. V., 21, 107.
Conta V., 114.
Contreă A., 1.
Contrez G., 78.
Coşniţă C., 94, 106, 139.
Costăchescu D. C., 1.
Costăchescu V. C., 10, 13.
Cotescu C., 11, 12, 21, 23, 45, 46, 47, 129.
Crăciun G., 23.
Crişan T. I., 106.
Cristescu D., 131.
Cristescu I., 1.
Cristescu I., 10.
Cristescu V., 56.
Cristescu G. N., 45, 47, 69, 70.
Cristodulo N., 1, 65.
Crittia Livia, 58, 107.
Crivăţ I. V., 79.
Crook J. W., 31.
Cserveny I., 1.
Curea I., 1, 8, 12, 27, 81, 140, 143.
Czirjac V., 118, 131, 142.

Dan T., 104.
Dănciulescu G. V., 10.
Dărăbaş T., 32.
Darboux, 19.
Dăscălescu Hr., 20, 21, 34, 35, 47, 95, 102, 118, 119, 130, 131, 132, 142, 143.
David H. I., 139.
Davidovici P., 20, 21, 34, 45, 46, 47, 128.
Deciulescu D. G., 21, 35, 46, 47, 58, 71, 131, 143.
Demetrescu G., 1.
Denjoy M., 78.
Descartes, 128, 138.
Diaconescu M., 34, 45, 46, 47, 58, 71.
Diaconescu N., 1.
Dimitriu G., 10.
Dinculescu C. R., 47.
Dinu S. D., 139.
Djebcu L., 130.
Doboş E., 104.
Dobrozemski M., 1.
Dombrovschi P. I., 21.
Doolitle, 124.
Dramba N. C., 139.
Dumitrescu D., 32.
Dumitrescu E., 139.
Dumitriu-Dada, 1.
Dumitrache D., 7.
Dumitriu I., 19.

Ellenbogen N., 107.
Enache I., 130.
Epurescu V., 100.
Euclid, 56.
Euler, 19, 101, 138.

Feldstein M. S., 139.
Fermat, 93, 120, 137.
Fibonacci, 92.
† Filipescu E. G., 128.
Floareş I. A., 47.
Florea V. G., 139.
Florescu M., 1.
Florescu L. V., 10, 11, 12, 20, 21, 34, 35, 36, 45, 46, 47, 58, 67, 70, 71, 80, 81, 118, 128, 130, 131.
Fofiu C., 104.
Focşeneanu I. M., 64.
Frătici I., 1.
Fredholm, 114.
Froda A., 31.

Galilei, 56.
Gauss, 26.
Georgescu C., 128.
Georgescu D., 1, 12, 108, 127.
Georgescu I., 56.
Germay H. R., 7
Gheorghiu A., 100, 139.
Gheorghiu T. G., 139.
Gheorghiu V., 1.
Ghermănescu M., 1, 31, 37, 45, 65, 78, 83, 92, 114.
Ghişoiu I. P., 10, 20, 79, 94.
Ghiţescu S., 1, 124, 138.
Gloden A., 7, 11, 12, 17, 21, 31, 48, 56, 60, 64, 66, 72, 77, 80, 81, 84, 92, 96, 97, 108, 113, 114, 122, 126, 127, 132, 137, 138, 144.
Godeaux L., 7.
Goldstein N., 138.
Golovcencu M. I., 32.
Gonzales O. M., 7, 100.
Gooden, 78.
Goormagthigh V., 7, 56, 90.
Goruneanu I. M., 20.
Gracia Gord., 45.
Grosu I. A., 20.
Grumăzescu M., 45, 57, 60, 108, 132, 144.
Gutierrez Novoa L., 92.
Guţulescu N. A., 71.

Halpern L. J., 124.
Herman A. V., 21, 35, 46.
Hermite, 7.
Heroiu N. S., 35, 48.
Herschel, 124, 125.
Hilton Harold, 31.
Horga L., 48.
Hospital, 94.
Hristea H., 1.

Iacob C., 8, 65.
Iacob F., 138.
Iliescu G., 65.
Ioachimescu G. A., 138.
Ionescu B. A., 139.
Ionescu-Plican A., 32, 45, 100.
Ionescu C. Bujor, 1, 45, 56, 65, 78, 138, 139.
Ionescu-Ţiu D. C., 1, 12, 36, 48, 60, 80, 84, 96, 107, 144.
Ionescu V. D., 72.
Ionescu P. H., 20.
Ionescu I., 18, 56, 92, 111, 138.
Ionescu-Biss H. P., 1.
Ionescu C. S., 21, 48.
Iordănescu D., 10.
Iorgulescu T., 1.
Iovănescu D., 10.
Iovănescu F., 139.
Iscovici P., 139.
Iuga G., 18.
Ivănescu C., 20, 35, 95, 102, 104, 106, 117, 129.

Jakson, 125.
Janet G., 19.
Jeans, 125.
Jeba C. C., 102.
Jidanu I. C., 10, 12, 21, 24, 34, 36, 45, 46, 48, 58, 69, 70, 72, 108, 120, 130, 131, 142, 143.

Karamata J., 7, 32.
Kepler, 124.
Kielburger M., 1.
Kiss I., 32.
Kornis E., 10, 11, 21, 34, 35, 45, 46, 47, 48, 57, 58, 69, 71, 72, 83, 118, 130, 131, 140, 142.
Kühn I., 1.

Lagrange, 119.
Lalescu Tr., 100.
Lambrino Gh., 2.
Laţiu V., 2.
Lăzărescu S., 21, 34, 46, 48, 58, 60, 67, 80, 82, 107, 118, 128.
Leibnitz, 110.
Leibovici S., 108.
Lemoine, 78.
Leonida D., 2.
Lepşi I., 93.
Levi-Civita T., 32, 100.
Lewis, 124, 125.
Linteş I., 2, 32.
Liteanu G., 2, 100.
Losada Cr., 45.
Lupan A., 2.
Lupescu G. C., 11, 12, 21, 23, 24, 34, 36, 45, 46, 47, 48, 58, 67, 69, 82, 102, 118, 119, 128, 130, 131, 143.

Macovski E., 2.
Magheru I., 2.
Maiorescu I., 100.
Malachi I., 7.
Manolescu I. N., 139.
Manughevici C., 2.
Manuilă Al., 142.
Marconi G., 10.
Mardan D., 2.
Margulius M., 95, 102, 104.
Marian V., 18, 45, 56, 78, 138.
Marica P., 10, 11, 21, 48, 59, 128.
Marineanu T., 78.
Marinescu I., 2.
Marinescu M., 32.
Marinescu T., 20.
Marşieu T., 95, 101, 102.
Maşcaş G. P., 46, 48, 80.
Mateescu C., 32.
Mateescu Gr., 138.
Mateescu S., 2.
Matei D. D., 10, 11, 12, 20, 21, 23, 33, 34, 35, 36, 45, 46, 47, 48, 57, 58, 72, 80, 82, 83, 95, 104, 107, 118, 120, 129, 130, 131, 140, 142, 143
Mătieş I. V., 65, 66.
Mavaş G., 139.
Mazilu C. P., 106.
Medeleanu I., 10, 45, 46, 47, 58, 70, 71, 72, 118, 140, 142, 143.
Mehedinţi D., 106.
Mereuţă E., 20, 79, 95, 104.
Michel H., 78.
Mihai E., 2.
Mihăileanu N. N., 2, 3, 19, 48, 59, 60, 78, 79, 84, 85, 94, 96, 101, 114, 117, 120, 132, 138.
Mihăilescu G. E., 93.
Mihăilescu N. N., 138.
Mihalcea N. N., 106.
Milea G. E., 106.
Miloia I., 2.
Milu I. N. 21, 34, 46, 47, 48, 57, 58, 60, 69, 70, 82, 84, 107, 131, 140
Mioc V., 2.
Mitileanu S., 140.
Mitrinovitch S. D., 7.
Moessner A., 7, 84, 92, 96, 127, 128.
Moisovici M. S., 11, 21, 34, 45, 46, 47, 48, 58, 69, 80, 128.
Moldovan C., 142.
Motaş C., 142, 143.
Montel P., 19, 31.
Mordell J., 137.
Moulton, 125.
Munteanu G., 139.
Motoc D. M., 95, 102, 104.
Munteanu V. L., 48.
Murgu V. M., 10, 21, 34, 36, 118, 128, 130, 151, 132, 142, 143.
Murgulescu Elena 2.
Murgulescu G. I., 2, 65.
Myller Al., 32, 92.

N M., 56
Nadaşan S., 2.
Naneş Cornelia, 34.

Naneş G., 2.
Nedelcu V. N., 45, 46, 48.
Negrea A. L. M., 10, 11, 12, 20, 21, 24, 34, 35, 45, 46, 47, 48, 57, 58, 59, 60, 67, 70, 71, 80, 82, 83, 84, 95, 102, 104, 106, 107, 118, 120, 129, 130, 140, 143.
Negulescu D. S., 11, 12, 20, 21, 34, 46, 47, 48, 67, 80, 118, 129.
Negulescu V. S., 35.
Neniţescu D. C., 31.
Nestorescu D., 139.
Newton, 27, 49, 50.
Nichifor G., 2.
Nicolaescu St., 79.
Nicolau A., 2.
Nicolau Dobridor I., 139.
Nicolau P., 2, 65.
Niculescu V. A., 56, 101.
Niculescu G., 2.
Niculescu M., 2, 19, 31, 101, 128, 139.
Niculescu V., 100.
Nistorescu V. D., 45, 46.
Nognees R., 137.
Nogues R., 137.
Novacu V., 139.

Obradovici G., 18.
Obrechkoff N., 31.
Ogrin N., 2.
Olaru E., 21, 34, 118.
Onicescu O., 2.
Orăşeanu C., 2.
Orăşeanu G., 2.
Otta T., 128.

Pădureţ V., 21, 34, 118.
Pănoiu M., 95.
Panaitescu S. C., 100.
Pantu Z. I., 10.
Paşcanu F., 139.
Pascu V. V., 48.
Păsculescu M. V., 117.
Pasere M., 21, 129.
Pâslariu V. V., 95.
Patriciu V., 2, 32.
Păunescu N., 95.
Pavel H. N., 10.
Percea V., 138.
Petre C. I., 48.
Petrescu A., 2.
Petrescu-Craioviţa A., 10, 11, 21, 34, 129, 142.
Petrescu C. B., 21, 45, 48.
Petrescu P. I. B., 58.
Petrovitch M., 7.
Peyovitch T., 31.
Picone M., 31, 78.
Pillatte, 90.
Pitagora, 31, 100.
Poalelungi G. V., 21.
Pompei D., 31, 121.
Poincaré H., 26.
Pop L., 20, 104.
Popa I., 56.
Popa B. I., 104.
Popa G. I., 10, 79, 95.
Popa D. T., 95.
Popescu A., 67, 106, 131, 132.
Popescu Zorica N. A., 12, 21, 47, 58, 67, 80, 82, 96, 129, 140, 143.
Popescu C., 128, 139.
Popescu E., 2.
Popescu I. G., 56.
Popescu I., 2.
Popescu N. P., 95.
Popescu C. S., 95.
Popovăţ P., 32.
Popovici C. A., 21.
Popovici G., 10, 130, 131, 132, 142, 143.
Popovici I. G., 11, 20, 21, 22, 23, 34, 35, 36, 45, 46, 47, 48, 57, 118, 119, 129.
Popovici M., 131, 143.
Popovici Tib., 19, 64, 93.
Postelnicescu C. M., 11.
Postolache V., 100.
Potopeanu Gh., 139.
Predoescu I. M., 33, 102, 128.
Predoescu M. T., 79, 95, 106.
Predoiu F., 102, 104.
Procopiescu M., 106.
Prossinagg C., 13, 14.
Protopopescu I. 2.
Purcariu I., 2.
Purcariu C. I., 31, 32.

Racliş N. R., 2.
Radu D., 118, 129.
Rădulescu G. O., 24, 34, 45, 46, 47, 48, 58, 70, 71, 80, 84, 107, 108, 118, 129, 130, 131.
Răduleţ R., 2.
Reicher L. H., 130, 131, 142, 143.
Ripianu A., 11, 12, 21, 22, 24, 34, 35, 36, 45, 46, 47, 48, 57, 58, 59, 70, 71, 80, 82, 107, 108, 118, 119, 129, 130, 132, 140, 142, 143.
Rizescu I., 106.
Rohr A., 58, 71.
Roibănescu C., 2.
Rolle, 140.
Roman I. I., 138.
Rosenberg I., 10, 11, 21, 22, 34, 35, 45, 46, 48, 70, 108, 129.
Rosemblatt A., 7, 45.
Rosenblatt S. M., 130, 131, 144.
Rosenthal T., 118.
Roşu A. A., 31.
Russel, 124.
Russu E., 138.
Rusu D. C., 20, 79.
Rusu L., 59.

Săceanu S., 65.
Sâmbotin G., 106.
Şandor V., 142.
Sarmeş I., 7, 32.
Săruleşteanu I. E., 130.
Sauciuc L., 2, 65.
Savin C. I., 2, 10, 49, 104, 129.
Savin Maria, 20, 21, 34, 118.
Savu I. V., 58, 69, 108.
Savovici F.,102, 104.
Săvulescu T., 19.
Scărlătescu N., 31.
Schiffner, 123.
Schileru I., 2, 23, 24, 120, 128.
Scripeg K., 139.
See, 125.
Segal L., 139.
Segal Z., 11, 12, 21, 24, 118, 132, 144.
Segal Zoe, 58, 84, 140.
Segre, 19.
Selmeranu H., 130.
Şerban T., 95, 102.
Şerbănescu S., 22.
Şerbulescu A. C., 71, 131.
Sergescu P., 2, 19, 114.
Severineanu C., 2.
Sigall L., 139.
Sierpinski W., 32.
Simionescu G. D., 2, 7, 31, 60.
Simson, 77.
Sispanov S., 138.
Smigelschi O., 2.
Smith B., 138.
Sobel M., 139.
Solacolu C. Ş., 32.
Solomon I., 110, 130, 131.
Sonto Barrel J., 7.
Şova C. I. G., 104.
Staicu I. N., 45, 46, 48, 58, 71, 108, 140, 142.
Stamate I. I., 21, 22, 36, 45, 46, 47, 48, 58, 67, 70, 130, 131, 142, 143.
Stamatescu I., 2.
Stambuleanu A., 2, 32.
Stan A., 2, 31, 94, 139.
Stan D., 92, 114, 128.
Stănescu C., 2, 8.
Stanzel E., 2.
Ştefan R., 100.
Ştefan C. T., 118.
Ştefănescu A., 22.
Ştefănescu C., 11, 12, 21, 22, 34, 35, 46, 47, 48, 58, 59, 60, 70, 82, 107, 108, 129, 140.
Ştefănescu D. N., 10, 11, 32, 46, 48, 58, 60, 107, 118, 119, 129, 130, 142, 144.
Ştefănescu S. Sabba, 32.
Sternberg H., 48, 70.
Stoenescu D. M., 45, 46, 48, 58, 71, 129, 131, 140, 143.
Stoian S. I., 47.
Stoica N. A., 139.
Stoica D., 65, 92, 95, 100.
Stoica N. V., 45, 48.
Stoicescu L., 2.
Stoicescu M., 2.
Stoilov S., 31, 32.
Suhov I., 2, 7, 19, 32.
Süli M., 104, 139.

Tărăbuţă C. P., 56.
Tarălungă G. D., 21, 22, 36, 46, 47, 57, 58, 106, 108, 143.
Tăraş V., 139.
Tatomir M. G., 58, 107.

Tăutu S. T., 104.
Teodorescu C., 2, 3, 13, 25, 37, 49, 61, 70, 73, 85, 97, 109, 121, 131.
Teodorescu D., 31, 46, 48, 71.
Teodorescu N. D., 12, 22, 35, 45, 47, 58, 130, 143.
Teodorescu N., 139.
Teodorescu V. V., 22.
Teodoru H., 32.
Teodosiu A., 2.
Thébault V., 6, 7, 12, 17, 24, 30, 32, 33, 36, 44, 45, 48, 55, 60, 71, 72, 78, 90, 91, 93, 99, 108, 113, 119, 132.
Theodoridi G. L., 106.
Tica P. M. Gall, 11, 22, 45, 47, 58, 59, 71, 82, 95, 102, 106, 108, 129, 130, 140.
Tilică C. St., 10, 11, 12, 21, 22, 23, 24, 34, 35, 45, 46, 47, 48, 57, 58, 69, 70, 71, 72, 81, 84, 96, 107, 108, 119, 120, 129, 130, 131, 132.
Țino O., 2.
Țițeica G., 56, 100, 128.
Toscano Let., 19, 32, 100.
Trebici C., 69.
Trică I., 95, 104.
Tutunaru D., 36, 106.

Vâlcovici V., 2, 19, 139.
Vandermonde, 118.
Vasilescu A. A., 45.
Vasilescu B., 115, 139.
Vasiliu G. G., 10, 139.
Vasiliu Leoben G., 2.
Vasiliu M., 56.
Vasu V., 32.
Veşcan T., 32, 65, 100, 138.
Viciu A. A., 2, 21, 22, 36, 45, 46, 56, 118, 129.
Vijelie E., 142.
Vişa E., 7, 10, 18, 19, 22, 36, 61, 63, 109, 118.
Virag Veronica, 102.
Vlad I. C. M., 21, 22, 23, 24, 34, 46, 48, 58, 60, 70, 71, 80, 108, 118, 119, 120, 129, 130, 131, 144.
Vlad I. V., 2.
Vlădea I., 65.
Vlădescu I., 2, 139.
Volterra V., 26.

Winkler A., 139.

Zagaican I., 10, 20, 21, 22, 34, 47, 48, 58, 60, 69, 71, 83, 84, 108, 118, 139.
Zăgănescu I., 2.
Zaharia N. O., 2, 10, 18.
Zamfirescu G. I., 48, 108, 139.
Zapan G., 2, 44, 114.

VIII. ERATA.

8.*)	Problema 195	. . .	142**)	Vol. II.
24.	Rândul 4 de jos din col. I începe cu „tecnic al armatei", în loc de „al armatei" . . .		1.	„ XVII.
29.	Problema 1381	. . .	38.	„ XVI.
48.	Problema 1581	. . .	36.	„ XVII.
60.	Problema 1592	. . .	48.	„ XVII.
64.	Nota 10 se corectează prin Nota 14 .	. . .	54.	„ XVII.
78.	Problema 832	. . .	60.	„ IX.
96.	Problema 1593	. . .	48.	„ XVII.
96.	Problema 1616	. . .	84.	„ XVII.
104.	Problema 1113	. . .	60.	„ XII
132.	Problema 1640	. . .	120.	„ XVII.

*) Pagina la care s'a publicat erata sau rectificarea. **) Pagina la care trebue făcută rectificarea.

Nota redacţiei. Tabla de materii a fost întocmită de d l Inspector *V. Mioc*, asistent la Şcoala Politechnică, căruia îi aducem vii mulţumiri.

Manuscrise primite de la corespondenţii noştrii până la 10 a lunei curente şi anume: Articole (A), Note (N), probleme propuse (P) şi probleme rezolvate indicate prin numărul lor de ordine.

Andrievici N. (1536, 1569, 1584, 1601, 1608, 1617, 1620, 1623, 1631); *Bărlea G. Victor* (1625); *Cerchez Milu* (P); *Cetăţeanu Stelian* (P., 1584, 1585, 1598, 1617, 1638, 1639, 1640, 1648); *Constantinescu C. Vasile* (1640); *Dăscălescu Şt. Hristache* (1602, 1620, 1622, 1623, 1625, 1626, 1631, 1638); *Grumăzescu M.* (P.); *Iidanu I. C-tin* (P); *Lupescu Corneliu* (1567, 1598, 1599, 1603, 1638, 1640); *Manuilă Alexandru* (1574, 1625, 1633, 1638); *Matei D. D-tru* (P., 1460, 1572, 1601, 1638, 1639); *Moldovan Cornel* (1625, 1626); *Moessner A.* (N., P.); *Motăş Camil* (P., 1488, 1562, 1567, 1574, 1578, 1584, 1587, 1592, 1597, 1598, 1599, 1601, 1603, 1614, 1616, 1617, 1620, 1625); *Marenzan S. Lupu* (1599, 1637, 1638); *Negrea A. Mircea* (1566, 1568, 1569, 1574, 1575, 1590, 1592, 1608, 1614, 1616, 1617, 1623, 1638, 1648); *Popescu-Zorica N. Alexandru* (P., 1502, 1567, 1569, 1574, 1584, 1585, 1592, 1593, 1597, 1599, 1601, 1608, 1611, 1614, 1617, 1638, 1639, 1640, 1646, 1647); *Saru-lesteanu I. Emanoil* (P., 1597, 1608, 1622, 1623, 1638); *Şandor Vasile* (1611, 1626); *Segal Zigu* (P., 1533, 1536, 1602, 1639, 1647, 1648); *Solomon I. Isac* (1561, 1571, 1586, 1607, 1631, 1638), *Stoenescu D. Mirel* (P., 1569, 1585, 1592, 1601, 1608 1617, 1623, 1625, 1626, 1631, 1639, 1647); *Vasu Vasile* (P.); *Vijelie Gh. Eugen* (1574, 1584, 1625, 1638).

Rugăm pe corespondenţii nostrii, a ne trimete de urgenţă costul abonamentului de 100 (una sută) lei, pentru „R. M. T." pe anul XVIII, care începe la 15 Martie 1938.

BIBLIOTECA ASTRA SIBIU

5 lei